CORSO DI FORMAZIONE ATTUARIALE CONTINUA

28 Febbraio 2013

ORDINE NAZIONALE DEGLI ATTUARI

La valutazione dell'Underwriting Risk per una Compagnia Danni

Salvatore Forte

Salvatore.Forte@uniroma1.it

Fabio Grasso

Fabio.Grasso@uniroma1.it

Matteo Ialenti

Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Marco Pirra

Marco.Pirra@unical.it

S.I.F.A. s.r.l.

Agenda

1. **Solvency II**

2. **Modelli interni per il Premium Risk**

3. **Modelli interni per il Reserve Risk e tecniche di Re-reserving e Backtesting**

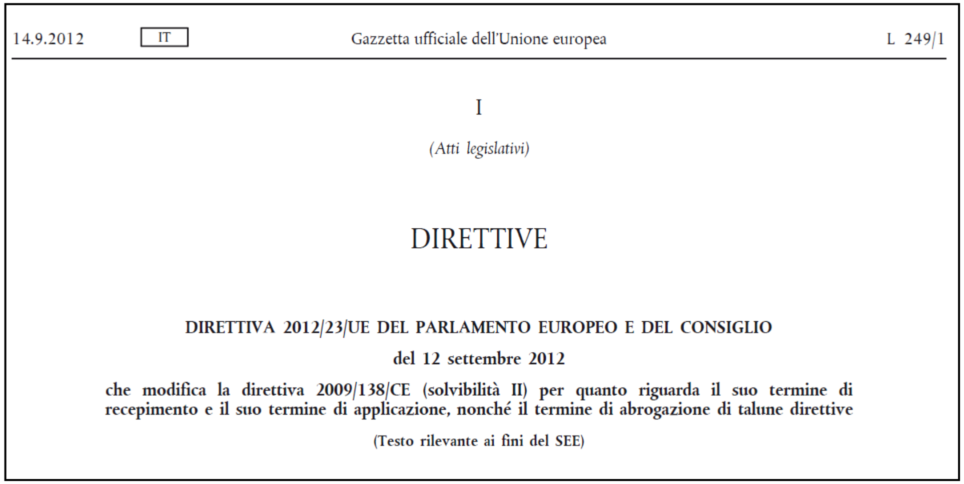
Solvency II

Stato dell'arte del Progetto Solvency II

- ✓ Pubblicata nella Gazzetta ufficiale dell'Unione europea del 14 settembre 2012 la Direttiva 2012/23/UE del Parlamento Europeo e del Consiglio del 12 settembre 2012 che modifica la Direttiva 2009/138/CE in materia di accesso ed esercizio delle attività di assicurazione e di riassicurazione (c.d. Solvibilità II), per quanto riguarda il suo termine di recepimento e il suo termine di applicazione.

- ✓ Posticipato

  dal 1 novembre 2012 al 1 gennaio 2014 il termine per l'applicazione delle disposizioni legislative, regolamentari e amministrative adottate a livello nazionale e quello di abrogazione delle vigenti direttive in materia di assicurazione e riassicurazione (pacchetto c.d. Solvibilità I).


14.9.2012 IT Gazzetta ufficiale dell'Unione europea L 249/1

I

(Atti legislativi)

DIRETTIVE

DIRETTIVA 2012/23/UE DEL PARLAMENTO EUROPEO E DEL CONSIGLIO

del 12 settembre 2012

che modifica la direttiva 2009/138/CE (solvibilità II) per quanto riguarda il suo termine di recepimento e il suo termine di applicazione, nonché il termine di abrogazione di talune direttive

(Testo rilevante ai fini del SEE)

Stato dell’arte del Progetto Solvency II

✓ Il 28 gennaio 2013 l’EIOPA ha pubblicato le nuove specifiche tecniche (TS) della Formula Standard Solvency II che sono alla base del Long Term Guaranty Assessment in corso di svolgimento (inizio 28 gennaio 2013, le Compagnie avranno tempo fino al 31 marzo 2013 per valutare l'impatto di tali misure)

eiopa
EUROPEAN INSURANCE
AND OCCUPATIONAL PENSIONS AUTHORITY

EIOPA-DOC-13/061
28 January 2013

Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment

(Part I)

Stato dell'arte del Progetto Solvency II

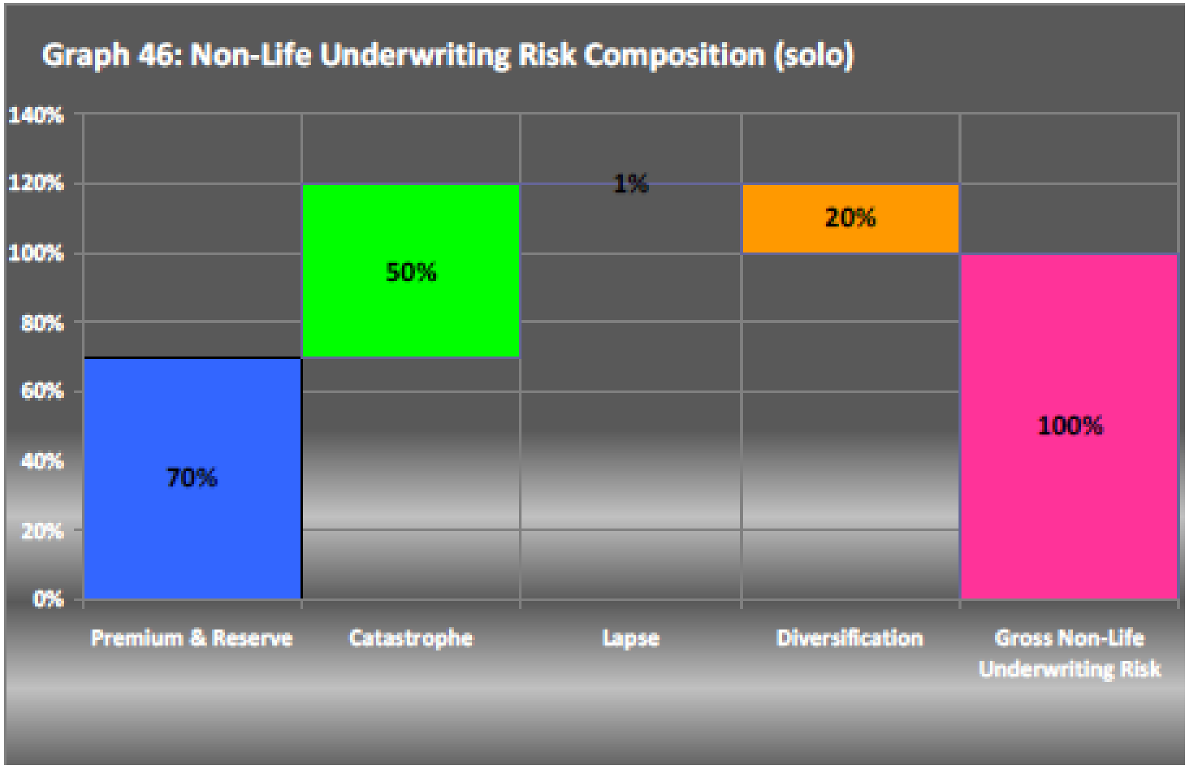
- ✓ L'esercizio Long-Term Guarantee Assessment (LTGA) è stato previsto per effettuare una quantificazione dell'impatto delle Long-Term Guarantees measures (il LTG package – o LTGP).

  Lo scopo dell'esercizio è quello di quantificare gli effetti delle LTG sul mercato assicurativo e sul sistema finanziario nel suo insieme.

- ✓ Le principali aree di discussione ancora in essere :
  - Risk free rate
  - Illiquid assets
  - Distressed market conditions
  - Transition

Stato dell'arte del Progetto Solvency II (QIS5)

- ✓ EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II, Non-Life Underwriting Risk Composition:



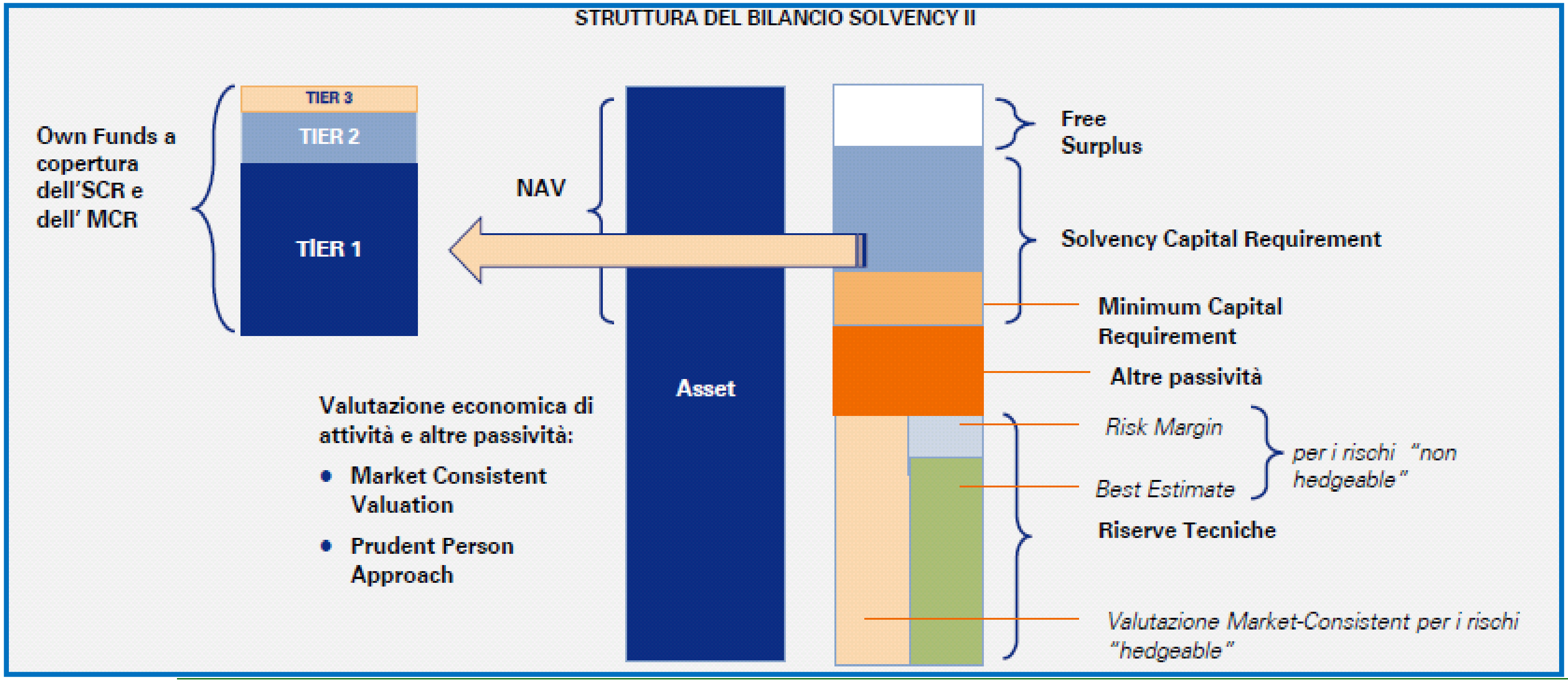
- ✓ Reserve risk : rappresenta il rischio derivante dalle oscillazioni dei pagamenti sinistri sia nel timing che nell'importo. In pratica fa riferimento al rischio di insufficienza della riserva sinistri accantonata alla data di valutazione rispetto ad un orizzonte temporale di 1 anno.

Direttiva 2009/138/CE

Art. 75:

a) le attività sono valutate all'importo al quale potrebbero essere scambiate tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato

b) le passività sono valutate all'importo al quale potrebbero essere trasferite, o regolate, tra parti consapevoli e consenzienti in un'operazione svolta alle normali condizioni di mercato.



Direttiva 2009/138/CE

✓ ***Art. 76:***

Il valore delle riserve tecniche corrisponde all'importo attuale che le imprese di assicurazione e di riassicurazione dovrebbero pagare se dovessero trasferire le loro obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione immediatamente ad un'altra impresa di assicurazione o di riassicurazione.

✓ ***Art. 77:***

Il valore delle riserve tecniche è pari alla somma di best estimate e risk margin.

1. La best estimate corrisponde alla media dei flussi di cassa futuri ponderata per la probabilità, tenendo conto del valore temporale del denaro (valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri) sulla base della pertinente struttura per scadenza dei tassi di interesse privi di rischio.

2. Il margine di rischio è tale da garantire che il valore delle riserve tecniche sia equivalente all'importo di cui le imprese di assicurazione e di riassicurazione avrebbero bisogno per assumersi e onorare le obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione.

Direttiva 2009/138/CE

1. La best estimate è calcolata sulla base di informazioni aggiornate e credibili e su ipotesi realistiche utilizzando metodi attuariali e statistici adeguati, applicabili e pertinenti. La proiezione dei flussi di cassa tiene conto di tutti gli elementi che influenzano i futuri cash-flow (pagamenti, spese, inflazione, ...). Deve essere calcolata al lordo, senza la deduzione degli importi recuperabili da contratti di riassicurazione e società veicolo.

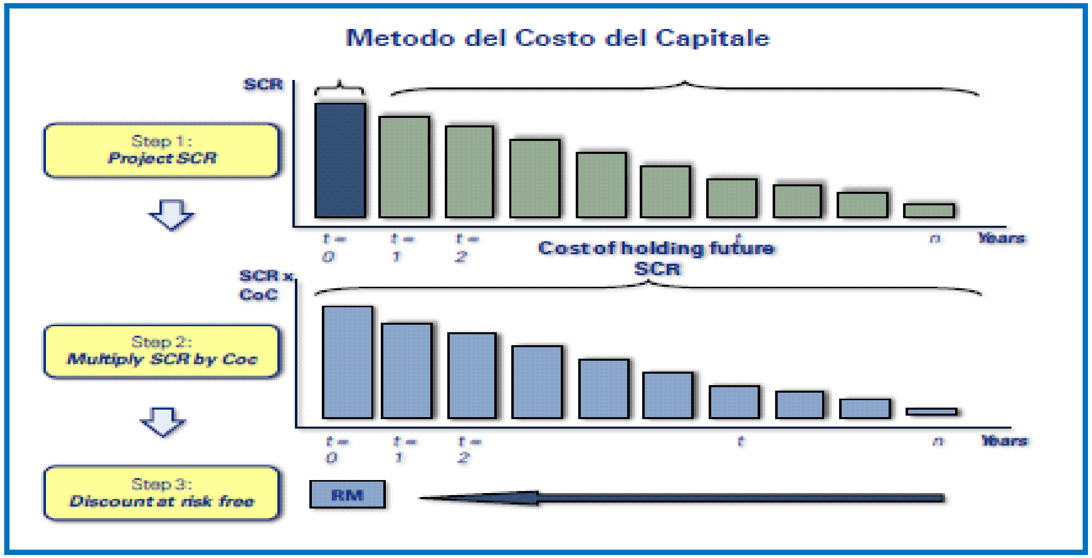
2. Il risk margin deve essere calcolato determinando il costo della costituzione di un importo di fondi propri ammissibili pari al requisito patrimoniale di solvibilità necessario per far fronte alle obbligazioni di assicurazione e di riassicurazione lungo tutta la loro durata di vita.

   Nel caso esistano strumenti o mercati in grado di replicare esattamente le obbligazioni, allora il valore delle passività (Best Estimate + Risk Margin) sarà descrivibile dal valore di mercato di questi strumenti (Rischi Hedgeable). In caso contrario le imprese valutano separatamente Best Estimate e Risk Margin (Rischi Non-Hedgeable).

Risk Margin (Direttiva 2009/138/CE)

Art.77:

In caso di calcolo separato, il Risk Margin è determinato mediante il Metodo del Costo del Capitale e rappresenta il costo derivante dall'obbligo di possedere fondi propri pari al Solvency Capital Requirement per supportare le obbligazioni fino a completa estinzione. Il Costo del Capitale da utilizzare dovrà essere identico per tutti gli operatori e dovrà rappresentare un tasso addizionale oltre al tasso risk-free. Tale calcolo dovrà essere compiuto separatamente per ciascun livello di segmentazione, senza effetto diversificazione.



$$RM_0 = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{CoC \cdot SCR_{t-1}}{\left(1+i(0,t)\right)^t}$$

Solvency Capital Requirement (Direttiva 2009/138/CE)

Art. 101-104:

Il requisito patrimoniale di solvibilità è calibrato in modo da garantire che siano presi in considerazione tutti i rischi quantificabili cui è esposta un'impresa di assicurazione o di riassicurazione.

Esso copre l'attività esistente nonché le nuove attività che si prevede vengano iscritte nel corso dei dodici mesi successivi. Per quanto riguarda l'attività esistente, esso copre unicamente le perdite inattese.

Il requisito patrimoniale di solvibilità corrisponde al Valore a rischio (Value at risk) dei fondi propri di base dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione soggetto ad un livello di confidenza del 99,5% su un periodo di un anno.

Solvency Capital Requirement (Direttiva 2009/138/CE)

Art. 101-104:

Il requisito patrimoniale di solvibilità di base comprende moduli di rischio individuali aggregati considerando opportuni coefficienti di correlazione.

a) il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione non vita (**SCR_{nl}**);

b) il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione vita (**SCR_{life}**);

c) il rischio di sottoscrizione per l'assicurazione malattia (**SCR_{health}**);

d) il rischio di mercato (**SCR_{mkt}**);

e) il rischio di inadempimento della controparte (**SCR_{def}**);

f) il rischio operativo (**SCR_{op}**).

$$\boxed{BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{\text{intangible}}}$$

Solvency Capital Requirement

Il requisito di capitale SCR viene stimato attraverso un approccio di tipo modulare attraverso i seguenti *step* operativi:

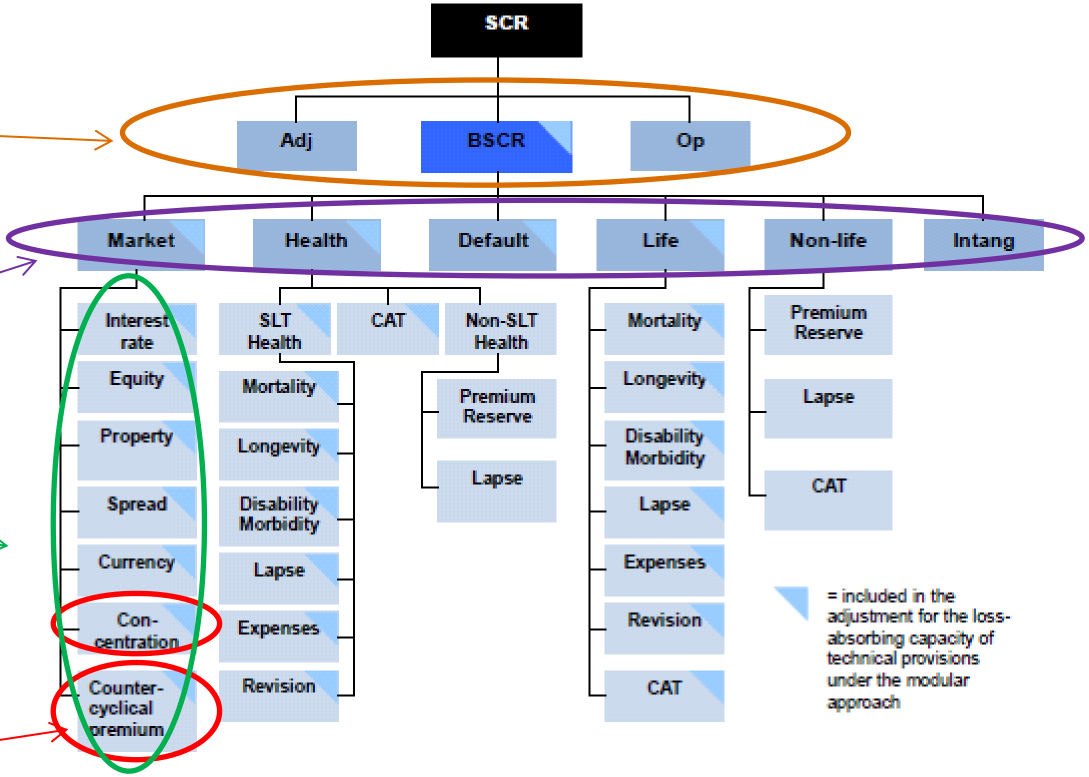
4. Aggiunta al BSCR del SCR relativo al rischio Operativo e degli Aggiustamenti (la capacità di assorbimento di perdite delle riserve tecniche e delle imposte differite).

3. Aggregazione dei requisiti di capitale relativi ai 6 rischi principali tramite coefficienti di correlazione in modo da ottenere il BSCR.

2. Aggregazione, per ciascun modulo di rischio, dei requisiti di capitale relativi ai sotto-moduli tramite coefficienti di correlazione lineare.

1. Determinazione del requisito di capitale per ogni sotto-modulo in cui sono divisi i 6 rischi principali. Il requisito viene calcolato, a seconda del rischio, con:
    - Scenario Testing Approach
    - Factor Based Formula

calibrati per riprodurre un VaR al 99,5% su 1 anno



The SCR sub-module for Counter-cyclical premium risk should be disregarded for the qualitative assessment.

Solvency Capital Requirement complessivo (Technical Specifications 28 gennaio 2013)

$$\boxed{\mathbf{SCR = BSCR + ADJ + SCR_{Op}}}$$

dove:

- **BSCR** è il requisito di solvibilità di base;
- **ADJ** è l'aggiustamento per l'effetto di assorbimento del rischio delle riserve tecniche e delle imposte differite;
- $\mathbf{SCR_{Op}}$ è il requisito di capitale per il rischio operativo.

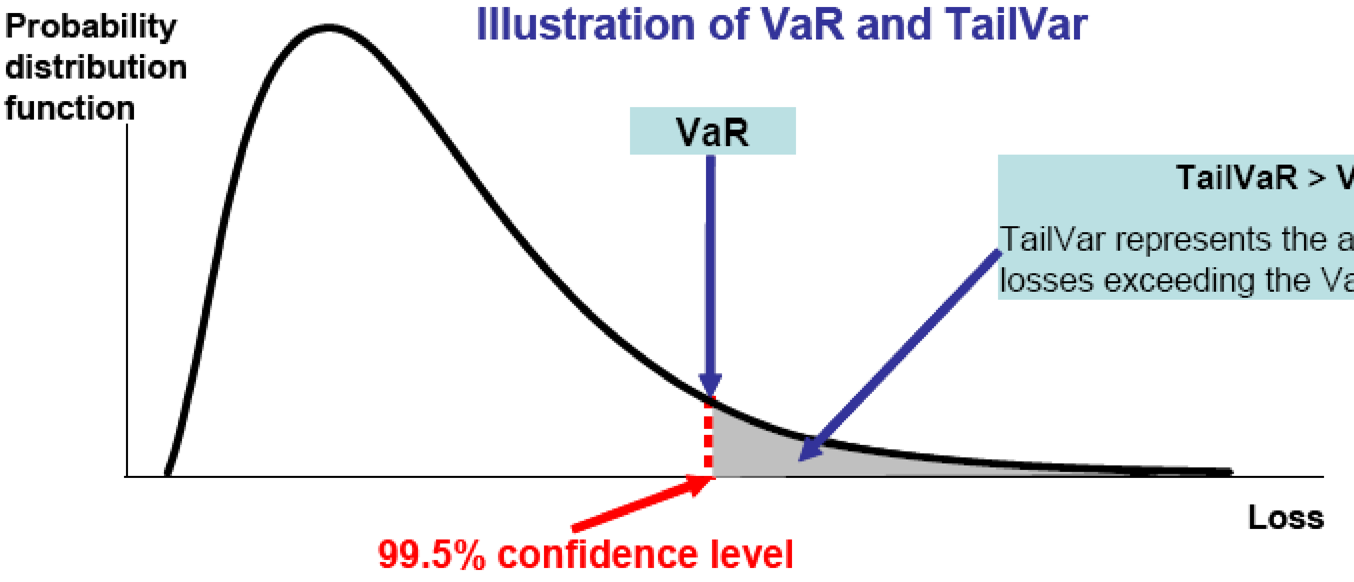
Solvency Capital Requirement

Le principali misure di rischio sono VaR e TVar, rispettivamente definiti come:

$$VaR_\alpha = \min\left(x \mid \mathrm{Prob}\left(\tilde{X} > x\right) = 1 - \alpha\right)$$

$$TVaR_\alpha = E\left(X \mid X > VaR_\alpha\right)$$

La Direttiva Solvency II pone come misura di rischio il VaR99,5% su un orizzonte temporale di un anno.



Solvency Capital Requirement

Line of Business	LTGA	QIS5
Medical Expenses Insurance (Proportional Reinsurance)	1 (13)	1 (1)
Income protection Insurance (Proportional Reinsurance)	2 (14)	2 (2)
Worker's compensation Insurance (Proportional Reinsurance)	3 (15)	3 (3)
Motor Vehicle Liability Insurance (Proportional Reinsurance)	4 (16)	1 (1)
Motor, Other Classes Insurance (Proportional Reinsurance)	5 (17)	2 (2)
Marine, aviation, transport Insurance (Proportional Reinsurance)	6 (18)	3 (3)
Fire and other damage to property Insurance (Proportional Reinsurance)	7 (19)	4 (4)
General Liability Insurance Insurance (Proportional Reinsurance)	8 (20)	5 (5)
Credit and suretyship Insurance (Proportional Reinsurance)	9 (21)	6 (6)
Legal expenses Insurance (Proportional Reinsurance)	10 (22)	7 (7)
Assistance Insurance (Proportional Reinsurance)	11 (23)	8 (8)
Miscellaneous Finacial Loss Insurance (Proportional Reinsurance)	12 (24)	9 (9)
Non-proportional Health Reinsurance	25	1
Non-proportional Casualty Reinsurance	26	2
Non-proportional Marine, Aviation and Transport Reinsurance	27	3
Non-proportional Property Reinsurance	28	4

Solvency Capital Requirement

Line of Business	**Rami Ministeriali**
Medical Expenses Insurance (Proportional Reinsurance)	1,2
Income protection Insurance (Proportional Reinsurance)	1,2
Worker's compensation Insurance (Proportional Reinsurance)	1,2
Motor Vehicle Liability Insurance (Proportional Reinsurance)	10
Motor, Other Classes Insurance (Proportional Reinsurance)	3
Marine, aviation, transport Insurance (Proportional Reinsurance)	4,5,6,7,11,12
Fire and other damage to property Insurance (Proportional Reinsurance)	8,9
General Liability Insurance Insurance (Proportional Reinsurance)	13
Credit and suretyship Insurance (Proportional Reinsurance)	14,15
Legal expenses Insurance (Proportional Reinsurance)	17
Assistance Insurance (Proportional Reinsurance)	18
Miscellaneous Finacial Loss Insurance (Proportional Reinsurance)	16

Non-Life Underwriting Risk

Il modulo del Non-Life Underwriting Risk ha l'obiettivo di valutare il costo del capitale necessario per far fronte alle seguenti 4 fonti di rischio:

1. PREMIUM RISK: rappresenta il rischio di tariffazione derivante dai contratti da sottoscrivere (inclusi i rinnovi) nell'anno successivo e ai rischi ancora in vigore sui contratti esistenti, ovvero il rischio che i premi relativi ai nuovi contratti più la riserva premi iniziale siano insufficienti a coprire il costo dei sinistri più le spese generate dei contratti.

   In tale rischio è implicitamente ricompreso anche il rischio spese (Expense Risk) legato alla volatilità dell'ammontare delle spese pagate.

2. RESERVE RISK: rappresenta il rischio di riservazione derivante dalle oscillazioni dei pagamenti sinistri sia nel timing che nell'importo. In pratica fa riferimento al rischio di insufficienza della riserva sinistri accantonata alla data di valutazione rispetto ad un orizzonte temporale di 1 anno..

Non-Life Underwriting Risk

Il modulo del Non-Life Underwriting Risk ha l'obiettivo di valutare il costo del capitale necessario per far fronte alle seguenti 4 fonti di rischio:

3. LAPSE RISK: rappresenta il rischio derivante dall'esercizio di opzioni da parte degli assicurati eventualmente contenute nei contratti non-life, quali ad esempio l'opzione di rescindere il contratto prima della scadenza pattuita o l'opzione di rinnovo del contratto secondo condizioni precedentemente stabilite.

   In particolare, per i contratti in cui sono previste tali opzioni il rischio in esame è insito nel calcolo della Riserva Premi, laddove i tassi di esercizio di tali opzioni ipotizzati possano poi risultare non corretti.

4. CAT RISK: rappresenta il rischio di perdite o di variazioni sfavorevoli nel valore delle passività assicurative derivanti dall'elevata incertezza nelle ipotesi per la determinazione dei premi e per la costituzione di riserve tecniche a causa di eventi estremi o eccezionali. E' legato sia a catastrofi naturali (Nat Cat) sia a catastrofi provocate dall'uomo (Man Made).

Descrizione Step di calcolo Non-Life Underwriting Risk

Fase 1. Calcolo per il singolo ramo

- Determinazione della misura di volume e della standard deviation σ per segment relative al Premium Risk mediante un approccio market wide eventualmente considerando anche il fattore NP_{lob}
- Determinazione della misura di volume e della standard deviation σ per segment relative al Reserve Risk mediante un approccio market wide

Fase 2. L'Aggregazione

- Aggregazione per segment delle σ del Premium e del Reserve
- Determinazione del σ complessivo mediante aggregazione del segment considerando i volumi

Fase 3. Il SCR per Premium&Reserve

- Valutazione della Diversificazione geografica e del Volume (Premi+Riserve) per segment eventualmente abbattuto per effetto della diversificazione
- Determinazione del requisito complessivo (Premium+Reserve) mediante l'applicazione della formula 3σ (complessivo) e l'utilizzo del volume corretto

Fase 4. Il SCR per il NL-UWR

- Aggregazione del requisito Premium+Reserve con i requisiti ottenuti per il CAT e per il Lapse

NL-Premium&Reserve Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

$$\boxed{NL_{pr} = 3 \times \sigma \times V}$$

V : misura di volume complessiva pari alla somma dei volumi dei signoli segments (sia Premi che Riserve), ed eventualmente corretto per effetto della diversificazione

σ : variabilità complessiva dovuta a Premium&Reserve, ottenuta mediante l'aggregazione (basata su una matrice di correlazione lineare) dei singoli segments

NL-Premium&Reserve Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

Il Volume di ogni ramo è ottenuto dalla somma di due componenti, una relativa al rischio di tariffazione ed una relativa al rischio di riservazione (entrambe valutate al netto della riassicurazione)

Volume Premi

Il Volume premi risulta pari alla somma del **valore attuale dei premi netti** che ci si attende siano di competenza dopo i 12 mesi successivi alla data di valutazione per **contratti esistenti alla data di valutazione** , il **valore attuale dei premi netti** per i contratti che **saranno emessi** nei 12 mesi successivi alla data di valutazione e del **massimo tra i premi di competenza netti stimati per l'anno successivo ed i premi di competenza netti dell'anno trascorso**

$$\boxed{V_{(prem,s)} = \max\left(P_s, P_{(last,s)}\right) + FP_{(existing,s)} + FP_{(future,s)}}$$

Volume Riserve

Il Volume delle riserve è pari alla Best Estimate della riserva sinistri (non viene considerato il risk margin) al netto della riassicurazione

$$\boxed{V_{(res,s)} = PCO_s}$$

NL-Premium&Reserve Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

Il Volume **V** che concorre al calcolo finale del capital charge viene corretto per tenere in considerazione la diversificazione geografica. Nel caso in cui $DIV_{pr,LoB}$ è pari ad 1 (ovvero non si ha diversificazione) il volume complessivo è semplicemente la somma del volume dei premi stimato per l'anno successivo e quello delle riserve.

$$\boxed{V_s = \left(V_{(prem,s)} + V_{(res,s)}\right) * \left(0.75 + 0.25 * DIV_{pr,s}\right)}$$

L' **indice di Herfindal** è

= 1 nel caso di un'unica area geografica j

< 1 in presenza di diversificazione

$$DIV_{pr,s} = \frac{\sum_j \left(V_{(prem,j,s)} + V_{(res,j,s)}\right)^2}{\left(\sum_j \left(V_{(prem,j,s)} + V_{(res,j,s)}\right)\right)^2}$$

Tale indice deve essere posto sempre pari ad 1 per i segments 6, 10, 11 e 12

NL-Premium&Reserve Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

1. La <u>deviazione standard per il premium e reserve risk</u>, per ogni segment, si ottiene aggregando le deviazioni standard dei due sotto-rischi, ipotizzando un coefficiente di correlazione α =1/2

$$\boxed{\sigma_{(lob)} = \frac{\sqrt{(\sigma_{(prem,lob)}V_{(prem,lob)})^2 + 2\alpha\sigma_{(prem,lob)}\sigma_{(res,lob)}V_{(prem,lob)}V_{(res,lob)} + (\sigma_{(res,lob)}V_{(res,lob)})^2}}{V_{(prem,lob)} + V_{(res,lob)}}}$$

2. La <u>deviazione standard totale</u> si ottiene considerando la correlazione tra i segment:

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{V_{nl}}\sqrt{\sum_{s,t} CorrLob_{s,t} \cdot \sigma_s \cdot \sigma_t \cdot V_s \cdot V_t}}$$

CorrS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1: Motor vehicle liability	1											
2: Other motor	0,5	1										
3: MAT	0,5	0,25	1									
4: Fire	0,25	0,25	0,25	1								
5: 3rd party liability	0,5	0,25	0,25	0,25	1							
6: Credit	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	1						
7: Legal exp.	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	1					
8: Assistance	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	1				
9: Miscellaneous.	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1			
10:Np reins. (casualty)	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	1		
11:Np reins. (MAT)	0,25	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	1	
12:Np reins. (property)	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	0,5	0,25	0,25	0,25	1

Dove:

- s, t = indici dei segment;
- $CorrLob_{s,t}$ = coeff. di correlazione lineare;
- V_s, V_t = misure di volume per segment

NL-Premium Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

Il rischio di tariffazione: **rischio tipico dell'impresa assicurativa derivante dalla sottoscrizione dei contratti di assicurazione, associato agli eventi coperti, ai processi seguiti per la tariffazione e selezione dei rischi, all'andamento sfavorevole della sinistralità effettiva rispetto a quella stimata.**

SOLVENCY II

$$V_{(prem,s)} = \max\left(P_{LoB}, P_{(last,s)}\right) + FP_{(existing,s)} + FP_{(uture,s)}$$

NL-Premium Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

Per il **Premium Risk** i parametri della volatilità per i singoli rami sono prefissati (**sono cambiati rispetto al QIS5**):

Segment	*Standard deviation for premium risk (gross of reinsurance)*
1. Motor vehicle liability insurance and proportional reinsurance	$10\% \cdot NP_{lob}$
2. Other motor insurance and proportional reinsurance	$8\% \cdot NP_{lob}$
3. MAT insurance and proportional reinsurance	$15\% \cdot NP_{lob}$
4. Fire insurance and proportional reinsurance	$8\% \cdot NP_{lob}$
5. 3rd-party liability insurance and proportional reinsurance	$14\% \cdot NP_{lob}$
6. Credit insurance and proportional reinsurance	$12\% \cdot NP_{lob}$
7. Legal expenses insurance and proportional reinsurance	$7\% \cdot NP_{lob}$
8. Assistance insurance and proportional reinsurance	$9\% \cdot NP_{lob}$
9. Miscellaneous insurance and proportional reinsurance	$13\% \cdot NP_{lob}$
10. Np reins (cas)	17%
11. Np reins (MAT)	17%
12. Np reins (prop)	17%

NP_{lob} rappresenta un fattore di correzione che ha l'obiettivo di considerare l'effetto di risk mitigation apportato dalla riassicurazione non proporzionale.
Per le Lob 1, 4 e 5 dovrebbe essere posto pari all'80% mentre per le altre LoB pari al 100%

NL-Reserve Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

Il rischio di riservazione: **rischio legato alla non sufficienza delle riserve tecniche rispetto agli impegni assunti verso gli assicurati e danneggiati.**

SOLVENCY II

$$\boxed{V_{(res,LoB)} = PCO_{LoB}}$$

NL-Reserve Risk: il modello proposto dalle TS 28 gennaio 2013

Per il **Reserve Risk** i parametri della volatilità per i singoli rami sono prefissati (**sono cambiati rispetto al QIS5**):

LoB_t	*standard deviation for reserve risk (net of reinsurance)*
Motor vehicle liabilityinsurance and proportional reinsurance	9%
Other motor insurance and proportional reinsurance	8%
MATinsurance and proportional reinsurance	11%
Fire insurance and proportional reinsurance	10%
3rd-party liabilityinsurance and proportional reinsurance	11%
Creditinsurance and proportional reinsurance	19%
Legal expensesinsurance and proportional reinsurance	12%
Assistanceinsurance and proportional reinsurance	20%
Miscellaneousinsurance and proportional reinsurance	20%
Np reins (cas)	20%
Np reins (MAT)	20%
Np reins (prop)	20%

Internal Risk Models per la definizione del requisito di capitale

In riferimento al Pillar II, agli artt.112 e ss. della Direttiva 138/2009/CE, si ritrovano le disposizioni normative in merito ai modelli interni.

Art.112.

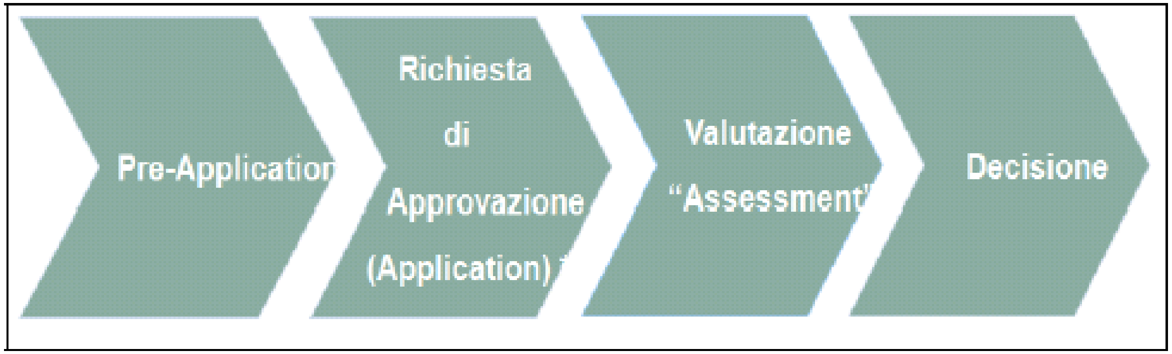
- Gli Stati membri garantiscono che le imprese di assicurazione e di riassicurazione possano calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità utilizzando un <u>modello interno completo o parziale approvato dalle autorità di vigilanza</u>.
- Le imprese di assicurazione e di riassicurazione possono utilizzare modelli interni parziali per il calcolo di <u>uno o più elementi seguenti</u>:
  a) uno o più moduli di rischio, o sottomoduli, del requisito patrimoniale di solvibilità di base di cui agli artt.104 e 105;
  b) il requisito patrimoniale per il rischio operativo di cui all'art.107;
  c) l'aggiustamento di cui all'art.108.

In aggiunta, modelli parziali possono essere applicati a tutta l'attività dell'impresa di assicurazione o di riassicurazione o solo ad uno o più settori di attività rilevanti.

Internal Risk Models per la definizione del requisito di capitale

- L'approvazione del modello interno rappresenta il progetto più impegnativo rispetto all'implementazione di Solvency II sia per le imprese che per le autorità di vigilanza.
- L'approvazione del modello interno riguarda il suo scopo, costruzione, integrità ed applicazione.
- Affinchè il modello venga approvato è necessario che l'impresa dimostri che siano rispettati i requisiti previsti in direttiva, vale a dire lo use test e gli standard di qualità statistica, di calibrazione, di convalida e di documentazione.
- Dopo una fase di pre-application volontaria, viene effettuata la richiesta di approvazione fatta per iscritto indicando la descrizione e gli obiettivi del modello e allegando tutta la documentazione prevista nell'application pack.

L'autorità di vigilanza ha sei mesi dalla ricezione della documentazione completa per esprimersi sul modello approvandone o meno l'utilizzo per il calcolo dell'SCR.



Modelli interni per il Premium Risk

Premium risk: agenda

- Focus su alcuni modelli probabilistici per il numero di sinistri, per il danno e per il risarcimento
  - Esempio 1

- Focus su alcuni possibili modelli probabilistici per la valutazione del danno aggregato

- Modelli interni per il Premium Risk
  - Esempio 2
  - Esempio 3

Premium Risk: Sinistri, Danni, Risarcimenti

- Nel periodo di copertura, in genere un anno, il contratto di assicurazione è colpito da un ***numero aleatorio, N,*** di **sinistri.**

- Ciascun sinistro ***i*** (*i=1,2,…)* ***in ordine cronologico*** determina un **danno** ***di importo aleatorio*** $\boldsymbol{Z_i}$.

N: variabile aleatoria che rappresenta il **numero di sinistri**, *le cui possibili determinazioni sono i numeri naturali*
$\boldsymbol{Z_i}$***:*** variabile aleatoria che rappresenta il **danno** relativo all'*i*-esimo sinistro, *le cui possibili determinazioni sono i numeri reali*

Premium Risk: Sinistri, Danni, Risarcimenti

- In corrispondenza del danno Z_i l'assicuratore effettua, a beneficio dell'assicurato, il ***pagamento dell'importo aleatorio*** $\boldsymbol{Y_i}$, denominato **risarcimento**.

Relazione tra il **Danno** ed il **Risarcimento**

$$Y_i = \varphi(Z_i)$$

ovviamente
$0 \leq Y_i \leq Z_i$

$\varphi(\cdot)$ è la **funzione di risarcimento** rappresentativa delle condizioni contrattuali di copertura.

ESEMPI

- Copertura a *valore intero o garanzia illimitata* $\boxed{Y = Z}$
- Copertura con *massimale M* $\boxed{Y = \min(Z, M)}$

Premium Risk: Sinistri, Danni, Risarcimenti

ESEMPI

- Copertura *a primo rischio relativo* $\boxed{Y = \min(\rho \cdot Z, M)}$ con $\rho = V'/V$ ossia è il rapporto tra il valore dichiarato dall'assicurato V' ed il valore del bene V.

- Copertura con *franchigia assoluta f* $\boxed{Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le f \\ Z - f & \text{se } Z > f \end{cases}}$

- Copertura con *franchigia relativa* $\boxed{Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le f \\ Z & \text{se } Z > f \end{cases}}$

- Copertura con *franchigia assoluta f* e *massimale di garanzia M* $\boxed{Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le f \\ Z - f & \text{se } f < Z \le M \\ M - f & \text{se } Z > M \end{cases}}$

- Copertura con *aliquota di scoperto* ξ $\boxed{Y = (1 - \xi) \cdot Z}$

Premium Risk: il Costo Sinistri Aggregato

Il ***risarcimento globale X*** relativo ad un dato intervallo temporale, solitamente un anno, è dato da:

$$\boxed{X = \sum_{i=0}^{N} Y_i \ ,}$$

dove Y_0 è l'importo certo nullo.

X è una variabile aleatoria *le cui possibili determinazioni sono i numeri reali non negativi.*

NOTA: Si evidenzia che è ***trascurata*** la **componente finanziaria** relativa alla diversa collocazione temporale dei sinistri e dei conseguenti risarcimenti posti a carico dell'assicuratore. Ciò si giustifica con l'usuale ***brevità del periodo di copertura***.

Premium Risk: la Base Tecnica del Rischio

Si consideri un **portafoglio di contratti** di assicurazione ***riferiti*** ad un **medesimo tipo di rischio**

IPOTESI:

1. I contratti siano tutti contemporaneamente stipulati
2. I contratti siano contraddistinti da un eguale periodo di copertura
3. Il portafoglio sia composto da **rischi analoghi**, con riferimento:
   a) alle caratteristiche del rischio adeguatamente valutabili, all'epoca di stipulazione del contratto, da parte dell'assicuratore;

   b) alle condizioni contrattuali di copertura;

   c) ai valori monetari di esposizione al rischio *(ad esempio i valori dei beni assicurati o i massimali di garanzia).*

Premium Risk: la Base Tecnica del Rischio

Sotto tali ipotesi i **rischi** del portafoglio sono tra loro :

- qualitativamente e quantitativamente **omogenei** ***rispetto ai suddetti elementi***;

- **eterogenei** ***rispetto*** ad eventuali ***caratteristiche non*** adeguatamente ***valutabili all'epoca di stipula del contratto*** *(ad esempio, nell'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli: il comportamento alla guida, la conoscenza del codice, i chilometri annui percorsi,…);*

Si scelga a caso un rischio nel portafoglio e sia

$$X = \sum_{i=0}^{N} Y_i \ ,$$

il **risarcimento globale** a carico dell'assicuratore, con $Y_i = \varphi(Z_i)$.

Premium Risk: la Base Tecnica del Rischio

La Teoria collettiva del rischio

N numero aleatorio di sinistri che colpiscono il portafoglio
$Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ importo aleatorio del risarcimento da associare ad ogni sinistro

$$\mathbf{X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}$$

importo del ***risarcimento aggregato***

Ipotesi di indipendenza

1. condizionatamente all'evento "$N=n$", le variabili aleatorie sono indipendenti e identicamente distribuite;
2. condizionatamente all'evento "$N=n$", la distribuzione delle variabili aleatorie $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ non dipende da n;
3. la distribuzione di N non dipende dai valori assunti dalla variabili aleatorie $Y_1, Y_2, \dots$

Conseguenze

1. medesima funzione di ripartizione per ogni variabile aleatoria $F_Y(y) = \Pr ob(Y_i \le y)$
2. la distribuzione di X risulta determinata una volta note le distribuzioni del numero di sinistri e del loro costo

$$F_X(x) = \Pr(X \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr(X \le x \mid N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_Y^{*n}(x) \quad \Rightarrow \quad f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_Y^{*n}(x)$$

$$\boxed{E(X) = E(N) \cdot E(Y)}$$

$$\boxed{Var(X) = E(N) \cdot Var(Y) + Var(N) \cdot [E(Y)]^2}$$

Premium Risk: la Base Tecnica del Rischio

La **Base Tecnica del Rischio**

è la ***distribuzione di probabilità del risarcimento globale X***

Sotto le Hp classiche della Teoria del Rischio

Le ***distribuzioni di probabilità del numero di sinistri* N** e ***del danno Z*** costituiscono la **base tecnica del rischio.**

E' possibile:

Modellare N e Z ottenendo X

Modellare direttamente X

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

- La valutazione del numero di sinistri che un assicurato può causare in un determinato periodo futuro richiede la determinazione di una distribuzione con delle specifiche caratteristiche.

- In particolare, vengono usate distribuzioni discrete le cui probabilità sono definite solamente all'interno del sottoinsieme costituito da valori interi e non negativi (<u>*counting distribution*</u>). Infatti, in un contesto assicurativo, le *counting distribution* vengono usate per descrivere il numero di eventi che determinano una perdita per l'assicuratore o, più semplicemente, il numero di sinistri che colpiscono una Compagnia.

- Un elemento necessario per la descrizione della variabile aleatoria N che descrive il numero di sinistri è la funzione di probabilità, la quale stabilisce la probabilità che si verifichi l'evento *"il numero di sinistri è esattamente uguale a k"*:

$$p_k = \Pr(N = k) \qquad \text{dove } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → *Poisson* (λ)

Si ipotizzi che la variabile aleatoria "numero di sinistri" sia distribuita come una Poisson con unico parametro λ; indicando con $N(t, t+\Delta t)$ il numero di sinistri che si verificano in un intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$, si formulino le seguenti ***ipotesi***:

1. $P[N(t, t+\Delta t)=1] = \lambda\, \Delta t + o(\Delta t)$

   La probabilità di avere un sinistro in un piccolo intervallo di tempo Δt è proporzionale all'ampiezza di tale intervallo → tale probabilità non dipende dal momento di inizio dell'intervallo ed eventuali traslazioni sull'asse temporale non modificano la sua misura.

   Inoltre, è addizionato un fattore $o(\Delta t)$ che però è infinitesimo di ordine superiore a Δt → se $\Delta t \to 0$, anche $o(\Delta t)$ tenderà a 0 ma più velocemente dello stesso Δt.

2. $P[N(t, t+\Delta t)>1] = o(\Delta t)$

   La probabilità del verificarsi di due o più sinistri in un piccolo intervallo di tempo è trascurabile. Tale ipotesi è immediatamente riconducibile alla prima.

3. $P[N(\tau) = k, N(\tau') = k'] = P[N(\tau) = k] \cdot P[N(\tau') = k']$

   Il numero di sinistri relativi a intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → Poisson (λ)

A partire da queste ipotesi si può definire la probabilità del verificarsi di k sinistri in un intervallo di tempo t come segue:

$$p_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0,1,2\ldots.$$

dove:

- λ è un qualsiasi valore positivo equivalente al numero di successi che ci si aspetta che si verifichino in un dato intervallo di tempo
- e è la base del logaritmo naturale
- k è il numero intero non negativo delle occorrenze (successi) per cui si vuole prevedere la probabilità

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → Poisson (λ)

Proprietà

1. Media = Varianza
2. Date n variabili indipendenti $N_1, N_2, \ldots, N_n$ che si distribuiscono secondo una Poisson di parametri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, la variabile ottenuta dalla loro somma $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$ è ancora una variabile poissoniana con parametro dato dalla somma dei parametri, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$
3. Sotto le seguenti ipotesi:
   - il numero di sinistri che si verificano in un fissato intervallo di tempo (es. un anno) segue una distribuzione di Poisson con parametro λ.
   - i sinistri si possono classificare all'interno di m classi distinte ad ognuna delle quali è associata una probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_m$
   - gli eventi appartenenti ad ogni classe sono indipendenti dagli altri.

   il numero di sinistri all'interno di ogni classe $N_1, N_2, \ldots, N_m$ sono variabili aleatorie mutuamente indipendenti distribuite secondo una Poisson i cui parametri sono, rispettivamente, $\lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \ldots, \lambda_{pm}$.

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → Poisson (λ)

La distribuzione di Poisson, per la sua semplice struttura, per la presenza di un solo parametro e per le ipotesi che la contraddistinguono rappresenta una buona approssimazione del fenomeno *"Numero di sinistri"* in relazione ad un singolo rischio.

Allo stesso tempo, però, non è particolarmente adatta per la modellizzazione relativa all'intero complesso di rischio presenti in un portafoglio; infatti, avendo la media pari alla varianza, la sua applicazione potrebbe portare ad una *sottostima* della variabilità del numero di sinistri.

Perciò la Poisson è una distribuzione che si applica principalmente sotto l'ipotesi di ***omogeneità del portafoglio assicurativo***.

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg (a,τ)*

La distribuzione binomiale negativa può essere vista come un'*estensione della Poisson* in quanto viene ottenuta da tale distribuzione, sotto specifiche ***ipotesi***.

1. Il "numero di sinistri" relativamente ad un singolo rischio (o un singolo assicurato) segue una distribuzione di Poisson di parametro λ

$$N(t,\ t+1) \sim \text{Poisson}(\lambda) \rightarrow \quad p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

2. Il parametro λ non è costante ma è il risultato della variabile aleatoria Λ con *f.d.d.* $u(\lambda)$ e *f.d.r.* $U(\lambda)$

La probabilità che accadano esattamente k sinistri si ottiene calcolando il valore atteso di $P(N=k)$ condizionata all'evento "$\Lambda = \lambda$". Per il teorema delle probabilità totali:

$$p_k = \Pr(N=k) = E[\Pr(N=k) \mid \Lambda] = \int_0^\infty \Pr(N=k \mid \Lambda=\lambda)u(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot u(\lambda)d\lambda$$

→ Il valore atteso così definito dipenderà dalla ***distribuzione assunta da Λ***

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg (a,τ)*

Ipotizziamo che la variabile aleatoria Λ si distribuisca secondo una Gamma di parametri $\alpha>0$ e $\tau>0$ con *f.d.d.*

$$u(\lambda)=\frac{e^{-\tau\lambda}\cdot\tau^{\alpha}\cdot\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\Downarrow$$

$$p_k=\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\tau\lambda}\cdot\tau^{\alpha}\cdot\lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}d\lambda=\ldots=\binom{k+\alpha-1}{k}\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+\tau}\right)^{k}$$

con $k = 0,1,2,\ldots$ e $\alpha>0$ e $\tau>0$

Formula ricorsiva →

$$p_0=\left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\alpha}$$

$$p_k=p_{k-1}\cdot\frac{k+\alpha-1}{k\cdot(1+\tau)}$$

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg (a,τ)*

Proprietà

1. Media = $\mu = \dfrac{\alpha}{\tau}$ Varianza = $\sigma^2 = \dfrac{\alpha}{\tau} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\tau}\right)$

2. Essendo τ un parametro che assume solo valori positivi, nella distribuzione Binomiale Negativa la varianza eccede sempre la media; quindi, per un particolare insieme di dati, se la varianza osservata è maggiore della media osservata, la Binomiale Negativa ***risulta essere una scelta migliore*** per la rappresentazione del numero di sinistri rispetto alla Poisson.

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg* (a,τ)

La distribuzione Binomiale negativa, essendo generata a partire dalla Poisson con parametro non costante, permette la creazione di un modello che tenga conto della differenziazione in classi di rischio, ognuna delle quali si distribuisce secondo una Poisson con un particolare parametro. Perciò, la Binomiale Negativa è maggiormente adatta nel caso in cui il portafoglio assicurativo studiato è composto da ***rischi eterogenei***.

Premium Risk: modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

- Le usuali ***evidenze empiriche*** delle distribuzioni del numero dei sinistri mostrano ***varianza più elevata del valor medio.***
- Le ***distribuzioni*** del ***numero di sinistri osservate*** in pratica, seppur con differenze non trascurabili tra i vari rami danni, sono tipicamente caratterizzate da **asimmetria positiva**.

Poisson di parametro λ

$$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$E(N) = var(N) = \lambda$

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{k}\right) p_{k-1} \;, \quad k = 1, 2, \ldots \;, \; con \;\; p_0 = e^{-\lambda}$$

Mistura finita di Poisson di parametri positivi ε_j e λ_j ($j=1,2,\ldots,m$), con $\sum_j \varepsilon_j = 1$.

$$p_k = \varepsilon_1 \left(e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \right) + \ldots + \varepsilon_m \left(e^{-\lambda_m} \frac{\lambda_m^k}{k!} \right)$$

$$E(N) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \lambda_j \qquad var(N) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \lambda_j + \left(\prod_{j=1}^{m} \varepsilon_j \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \right)^2 .$$

Binomiale Negativa di parametri positivi *r* e *q*, con *0 < q < 1*

$$p_k = \binom{r+k-1}{k} q^r (1-q)^k \;,$$

$$E(N) = \frac{r(1-q)}{q} \;, \qquad var(N) = \frac{r(1-q)}{q^2} .$$

Mistura di Poisson di parametro **aleatorio** positivo *Λ*

$$p_k = \int_0^{+\infty} p_k(\lambda) \, dF_\Lambda(\lambda)$$

$$p_k(\lambda) = \Pr\{N = k \mid \Lambda = \lambda\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Funzione peso (della mistura)
funzione di ripartizione F_Λ del parametro Λ, con $F_\Lambda(0) = 0$

$E(N) = E[E(N \mid \Lambda)] = E(\Lambda)$ $\qquad$ $var(N) = E(\Lambda) + var(\Lambda)$

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

- L'approccio simulativo si basa sulla costruzione di distribuzioni teoriche dei fenomeni oggetto di studio al fine di valutare processi reali.

- Il ricorso alle variabili aleatorie, le quali dipendono dai parametri che le costituiscono, necessita dell'introduzione di un ***metodo in grado di stimare i parametri della variabile*** stessa.

- I metodi per la stima dei parametri sono procedure di tipo logico-matematico che consentono di stabilire l'insieme delle operazioni da applicare ai dati di un campione empirico per pervenire al valore di stima.

- Si distinguono in:
  - *metodi di stima puntuale* → la procedura si traduce in un solo valore numerico che si assume come stima del parametro
  - *metodi di stima per l'intervallo* → si calcolano gli estremi di un intervallo che con una prestabilita probabilità contiene al suo interno il valore incognito del parametro oggetto di stima

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

Il metodo dei momenti

Il metodo postula l'uguaglianza tra i momenti campionari dello stesso ordine.

Se la legge distributiva di una generica popolazione P, sulla quale viene osservato il fenomeno, è caratterizzata da r parametri $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$, si ottiene un sistema di r equazioni nelle r incognite $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$.

Il metodo si fonda sul presupposto che i momenti di P siano funzioni dei parametri $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$; per il momento di ordine h di P si può scrivere infatti (nel caso discreto):

$$\mu_{X^h} = \sum X^h f(X; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = \mu_{X^h}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$$

Consideriamo allora il sistema di r equazioni che segue, dove con $\bar{x}_1$ è indicato il primo momento campionario e con $\bar{x}_r$ il momento di ordine r,

$$\begin{cases} \mu_X(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \mu_{X^r}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) = \bar{x}_r \end{cases}$$

la soluzione$(\underline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \ldots, \underline{\theta}_r)$, se esiste, rappresenta la ***stima congiunta dei parametri incogniti***.

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

IL TEST DEL CHI-QUADRO

L'utilizzo di distribuzioni teoriche (variabili casuali) per la descrizione di un fenomeno reale comporta delle approssimazioni.

Il test di verifica delle ipotesi è un metodo statistico mediante il quale si "verifica" che le ipotesi adottate siano probabilisticamente compatibili con i dati.

In particolare, lo scopo del test del Chi-quadro è quello di conoscere se le frequenze osservate differiscono significativamente dalle frequenze teoriche.

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

dove:

- n_k → frequenze assolute osservate
- np_k → frequenze assolute teoriche
- m → numero di modalità (o classi)

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

IL TEST DEL CHI-QUADRO

$$\begin{cases} H_0 = \text{i dati provengono da una popolazione in cui le frequenze sono date dalle } p_k \\ H_1 = \text{i dati provengono da un'altra popolazione} \end{cases}$$

Indichiamo con:

- a → livello di significatività (ad es. 5%)
- $g = m\text{-}1\text{-}n_{par}$

Se $\chi^2 < \chi^2_{(g,1-\alpha)}$ → accetto il "fit"

Se $\chi^2 > \chi^2_{(g,1-\alpha)}$ → rifiuto il "fit"

Premium Risk: esempio 1 - stima dei parametri della distribuzione

Esempio

- *Considериamo la distribuzione del numero dei sinistri per un portafoglio R.C.A.*
- *Obiettivo:*
  - *"fittare" la distribuzione dei dati empirici sia con una Poisson che con una Binomiale Negativa attraverso il metodo dei momenti*
  - *Verificare l'adattamento della distribuzione stimata attraverso il test del X^2*

Numero sinistri	*Numero polizze*	*Frequenze relative*
0	97.000	0,9043
1	9.520	0,0888
2	698	0,0065
3	40	0,0004
4	6	0,0001
>4	-	-
Totale	**107.264**	**1,0000**

Media = 0,1031

Varianza = 0,1084

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

1. *Stimiamo i parametri della Poisson con il metodo dei momenti:*

$$\bar{x} = \lambda = 0{,}1031$$

Numero sinistri	Numero polizze	F.R. Poisson $p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	F.A. Poisson
0	97.000	0,9020	96.755,10
1	9.520	0,0930	9.976,43
2	698	0,0048	514,34
3	40	0,0002	17,68
4	6	0,0000	0,46
>4	-	-	-
Totale	**107.264**	**1**	**107.264**

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

2. *Calcoliamo la bontà di adattamento con il metodo del Chi-quadro con*

$$a = 0,05$$

$$g = 4-1-1=2$$

Tenuto conto della numerosità teorica nelle singole classi raggruppiamo l'ultima classe in ">3"

Numero sinistri	*Numero polizze*	*F.A. Poisson*	*Chi-quadro*
0	97.000	96.755,10	0,6199
1	9.520	9.976,43	20,8817
2	698	514,34	65,5853
>=3	46	18,13	42,8242
Totale	**107.264**	**107.263,99**	**129,91**

$$\chi^2 = 129,911 > \chi^2_{(2;0,95)} = 5,991$$

<u>CONCLUSIONI</u> **→ *"fittare" i dati a disposizione con una distribuzione di Poisson ci porta a commettere un errore troppo elevato***

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

1. *Stimiamo i parametri della Binomiale Negativa con il metodo dei momenti:*

$$E(N) = a/\tau$$

$$\sigma^2(N) = \frac{a}{\tau}\left(1+\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\begin{cases} E(N) = \bar{x} \\ \sigma^2(N) = s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{E(N)}{\sigma^2(N)-E(N)} = 19{,}49 \\ a = \dfrac{E(N)^2}{\sigma^2(N)-E(N)} = 2{,}01 \end{cases}$$

Numero sinistri	*Numero polizze*	*F.R. Bin-Neg*	*F.A. Bin-Neg*
0	97.000	0,9043	97.002,97
1	9.520	0,0887	9.513,74
2	698	0,0065	698,75
3	40	0,0004	45,58
4	6	0,0000	2,79
>4	-	0,0000	0,17
Totale	**107.264**	**1,0000**	**107.264,00**

Premium Risk: stima dei parametri della distribuzione

2. *Calcoliamo la bontà di adattamento con il metodo del Chi-quadro con*

$$\alpha = 0,05$$

$$g = 4\text{-}1\text{-}2=1$$

Tenuto conto della numerosità teorica nelle singole classi raggruppiamo l'ultima classe in ">3"

Numero sinistri	Numero polizze	F.A. Bin-Neg	Chi-quadro
0	97.000,00	97.002,97	0,0001
1	9.520,00	9.513,74	0,0041
2	698,00	698,75	0,0008
>=3	46,00	48,54	0,1332
Totale	**107.264,00**	**107.264,00**	**0,1382**

$$\chi^2 = 0{,}1382 < \chi^2_{(1;0{,}95)} = 3{,}8415$$

<u>CONCLUSIONI</u> → "fittare" i dati a disposizione con una distribuzione Binomiale Negativa ci porta a commettere un errore accettabile

Premium Risk: modelli per la distribuzione dell'importo dei sinistri

- In genere, le ***distribuzioni empiriche*** degli importi dei sinistri evidenziano, ***asimmetria positiva*** e quindi code molto pesanti.
- Buoni modelli per la rappresentazione del fenomeno sono quelli caratterizzati da un valore positivo dell'indice di asimmetria:

Lognormale di parametri μ e σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right) \Big/ (\sigma x)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad Var[X] = (E[X])^2 (e^{\sigma^2} - 1)$$

Pareto di parametri a e σ e τ

$$f(x) = \frac{\tau^a e^{-\tau x} x^{a-1}}{\Gamma(a)}$$

$$E[X] = \frac{a}{\tau} \qquad Var[X] = \frac{a}{\tau^2}$$

Gamma di parametri a e τ

$$f(x) = \frac{\tau^a e^{-\tau x} x^{a-1}}{\Gamma(a)}$$

$$E[X] = \frac{a}{\tau} \qquad Var[X] = \frac{a}{\tau^2}$$

$$se\ X_i \approx Gamma(a_i, \tau) \quad \Rightarrow \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i \approx Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \tau \right)$$

Esponenziale di parametro θ

$$f(x) = \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}$$

$$E[X] = \theta \qquad Var[X] = \theta^2$$

Premium Risk: modelli per la distribuzione dell'importo dei sinistri

Anche per l'importo del singolo sinistro, chiamato anche "*severity*", valgono le stesse considerazioni fatte per la frequenza sinistri, ovvero:

- Scelta della distribuzione
- Stima dei parametri
- Test per la verifica della bontà di adattamento

Premium Risk: esempio 2 - modelli interni per il Premium Risk

- ✓ **Si consideri un assicuratore che operi nelle seguenti Linee di Business:**
  - **RCA**
  - **Incendio e furto**
- ✓ **I dati relativi al portafoglio sono:**
  - **Serie storica di sei anni (2004 – 2009)**
    - Frequenza sinistri
    - Costo medio del singolo sinistro
    - Ipotesi di mercato relativa al coefficiente di variazione
  - **Numero assicurati: 10.000**

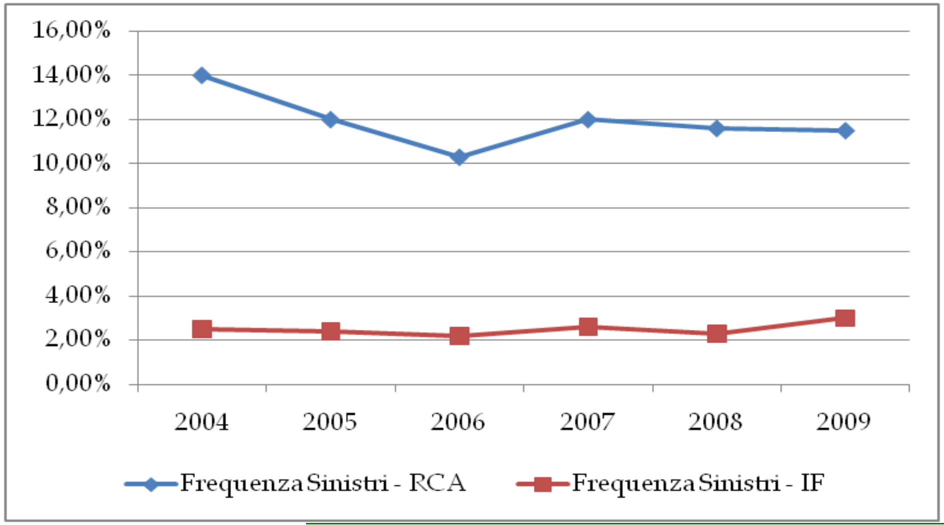
IPOTESI

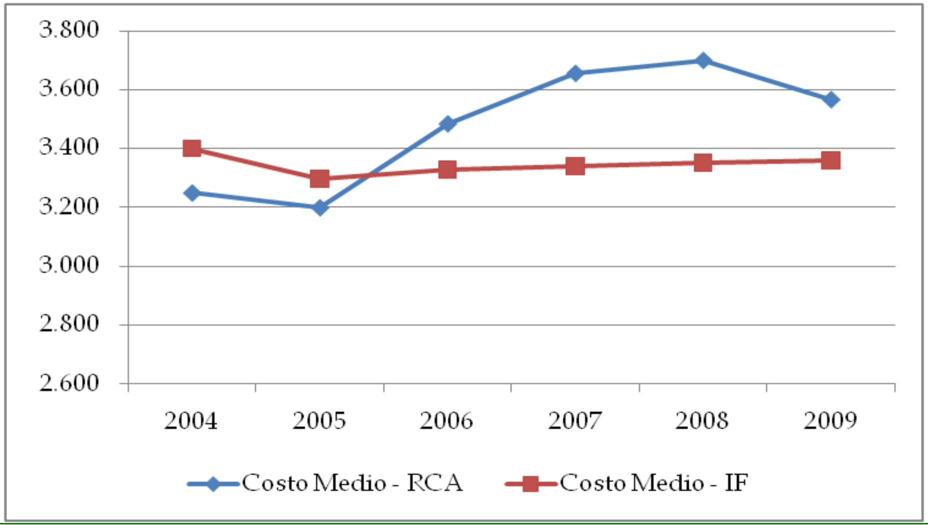
NUMERO SINISTRI → $N \sim Poisson(\lambda)$

COSTO SINISTRI → $Y \sim LogNorm(\mu, \sigma)$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Anno	RCA		IF	
	Frequenza Sinistri	Costo Medio	Frequenza Sinistri	Costo Medio
2004	14,00%	3.250	2,50%	3.400
2005	12,00%	3.200	2,40%	3.298
2006	10,30%	3.485	2,20%	3.328
2007	12,00%	3.656	2,60%	3.341
2008	11,60%	3.700	2,30%	3.352
2009	11,50%	3.567	3,00%	3.360
Media	11,90%	3.476	2,50%	3.347





Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

NUMERO SINISTRI

Parametri stimati	Ramo	λ
Poisson	RCA	11,90%
	IF	2,50%

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE (hp)

Coefficiente di variazione (hp)	
RCA	3
IF	7

COSTO SINISTRI

Parametri stimati	Ramo	*E(Y)*	*CV(Y)*	*Var(Y) = (CV(Y)*E(Y))^2*	μ	σ
LogNormale	RCA	3.476	3	108.764.041	7,00	1,52
	IF	3.347	7	548.754.050	6,16	1,98

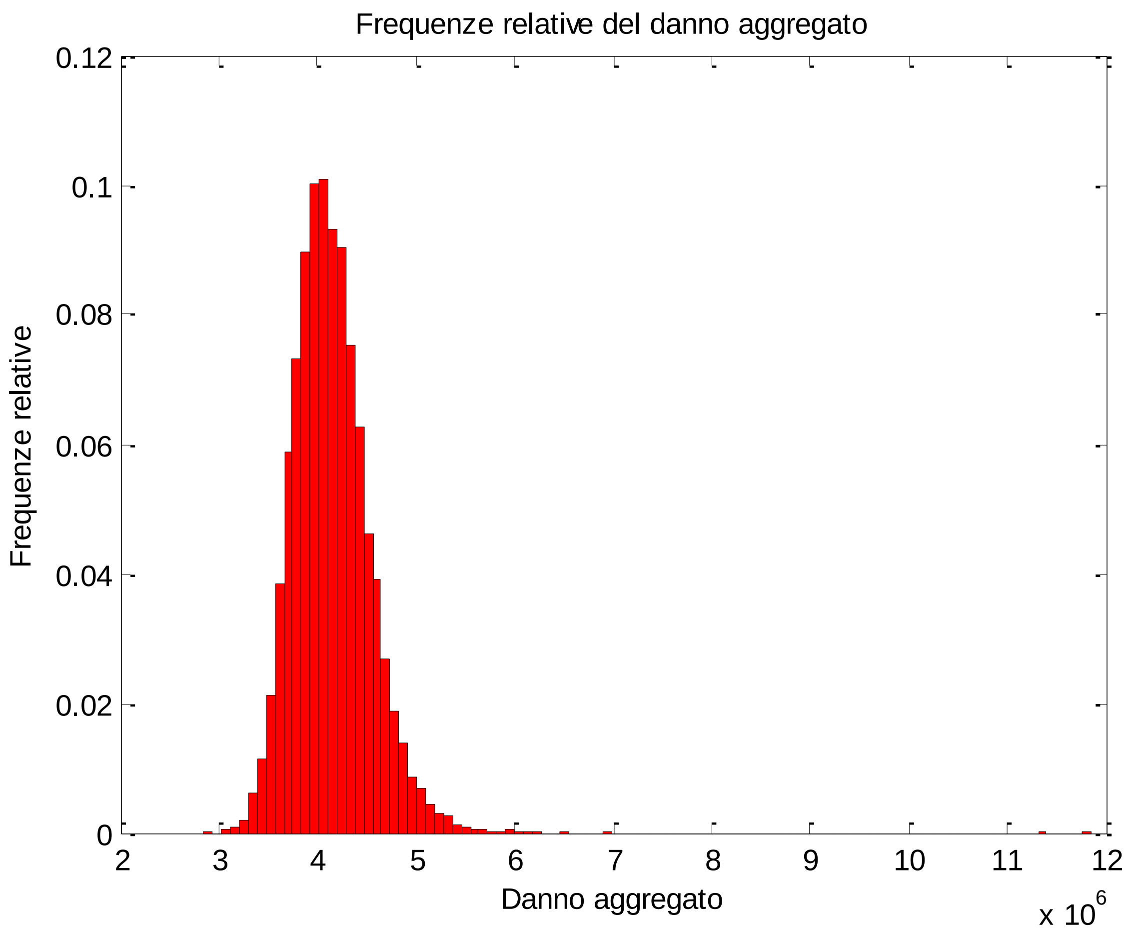
dove: $\mu = \ln\left(\frac{E(Y)^2}{\sqrt{Var(Y)+E(Y)^2}}\right)$ $\sigma = \sqrt{\ln\left(\frac{Var(Y)+E(Y)^2}{E(Y)^2}\right)}$

Il processo simulativo

1) Fisso il numero di simulazioni
2) Simulo il numero totale dei sinistri del portafoglio per una iterazione
3) Per ogni singolo sinistro simulo il valore del singolo risarcimento
4) Sommo tutti i singoli risarcimenti e determino il risarcimento aggregato di portafoglio per una singola iterazione
5) Ripeto i passi 2,3 e 4 per il numero di simulazioni fissato al passo 1

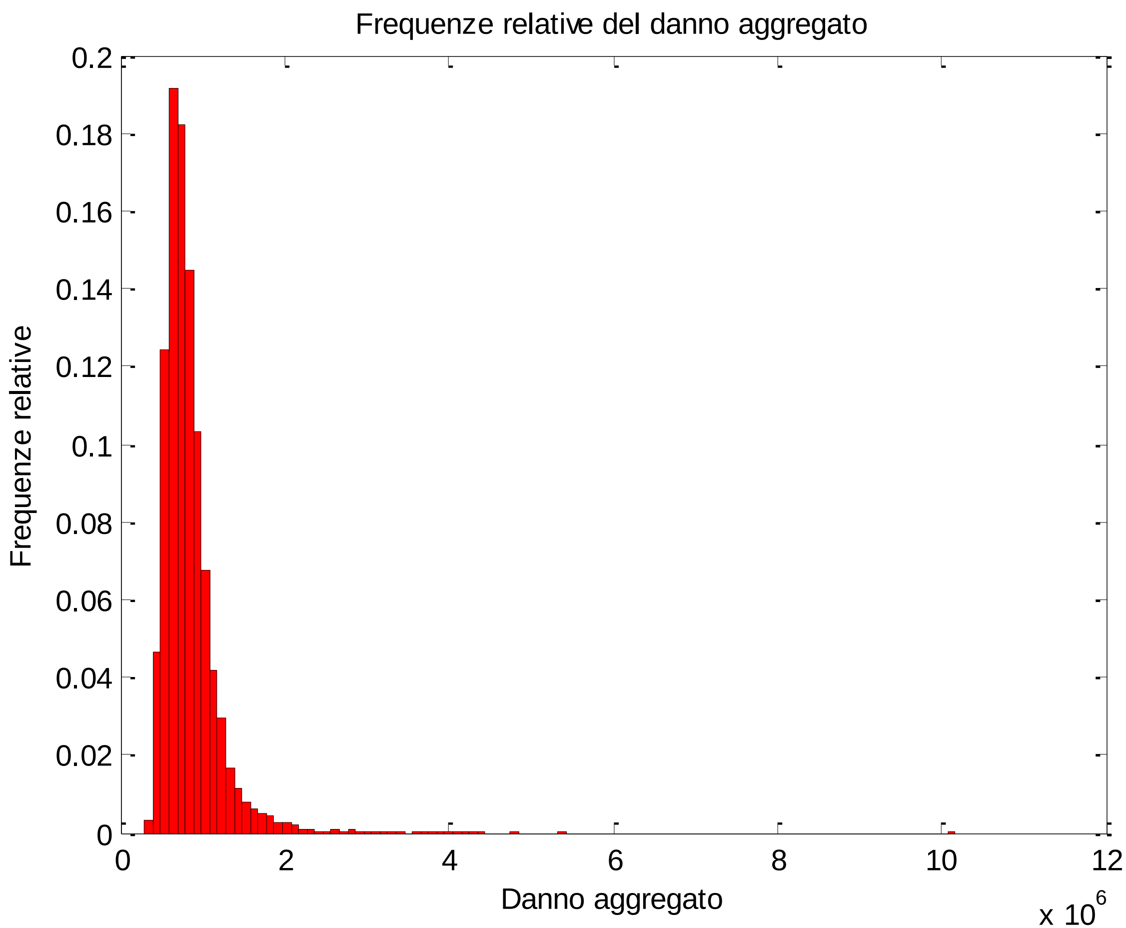
Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

DANNO AGGREGATO RCA



Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

DANNO AGGREGATO IF



Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

		RCA	IF
Premio Equo		413,68	83,66
Premio Puro[1]		436,20	94,30
Caricamento di sicurezza		5,44%	12,71%
Expenses Ratio[2]	μ	18,00%	30,00%
	σ	10,00%	15,00%
Caricamenti per spese		20,00%	35,00%
Premio di tariffa		545,24	145,07

[1] Calcolato considerando il 75° percentile della distribuzione del Costo Sinistri Aggregato.
[2] Si ipotizza una distribuzione Normale con parametri di mercato.

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

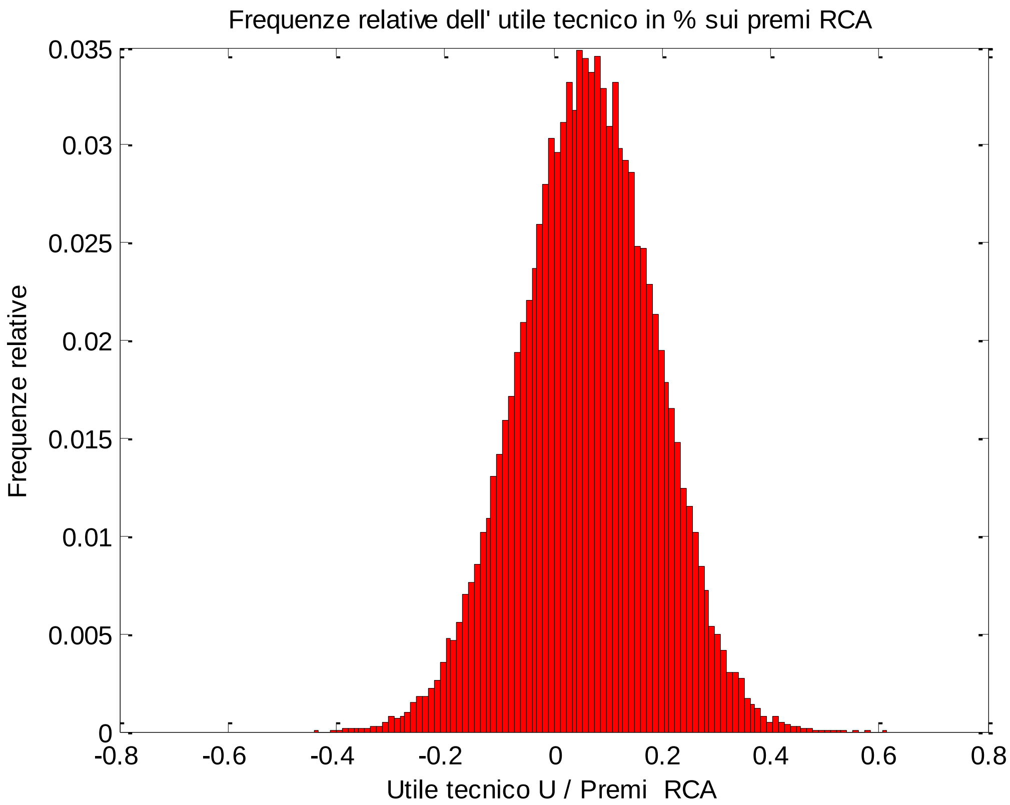
UTILE TECNICO

$$\boxed{U_1 = (P - E - X)\cdot(1 + j)^{-0,5}}$$

- *P*: Ammontare dei premi di tariffa incassati
- *E*: Spese
- *X*: Danno Aggregato
- *j*: Rendimento 4%
- *0,5*: Ipotesi di ingresso ed uscita dei cash flow a metà anno

Numero di simulazioni: 100.000

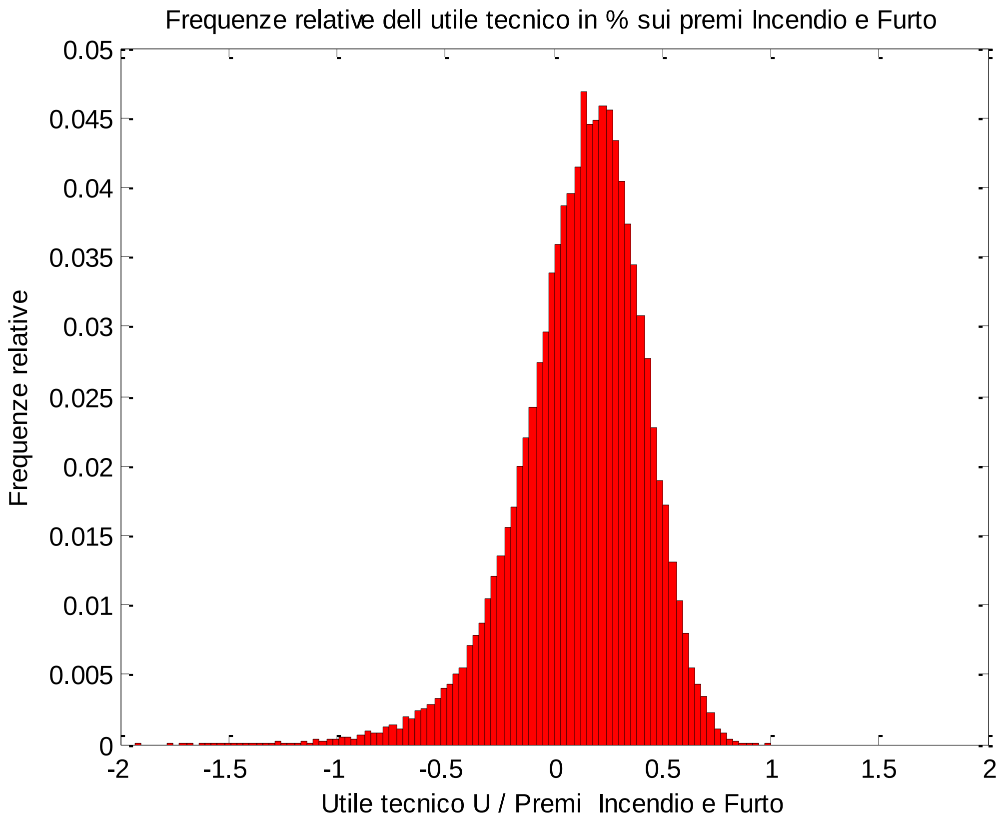
Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk



Percentile	UTILE/P
0,05%	-35,60%
0,50%	-26,01%
2,50%	-18,39%
25,00%	-1,92%
50,00%	6,45%
75,00%	14,78%
97,50%	30,02%
99,50%	37,28%
99,95%	46,57%

Risk Capital (99,5%)/P	**26,01%**

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk



Percentile	UTILE/P
0,05%	-133,99%
0,50%	-86,57%
2,50%	-53,01%
25,00%	-3,39%
50,00%	15,46%
75,00%	31,99%
97,50%	59,63%
99,50%	71,27%
99,95%	84,05%

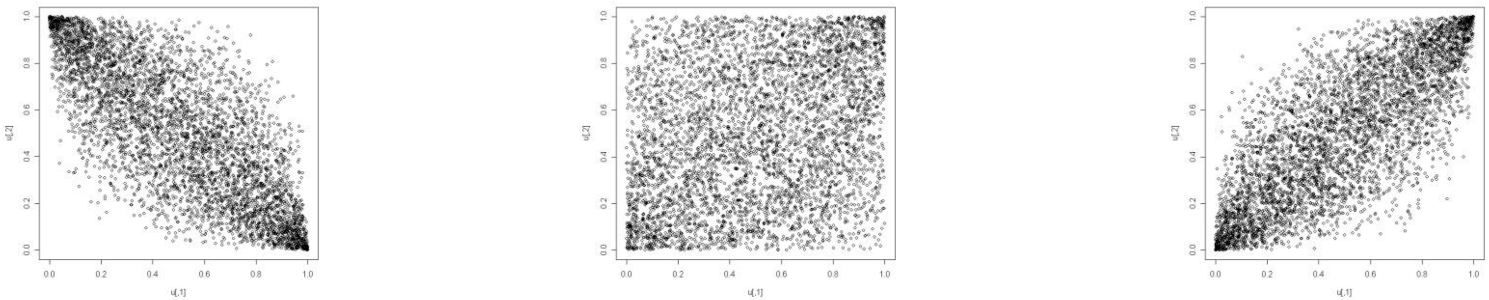
Risk Capital (99,5%)/P	**86,57%**

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

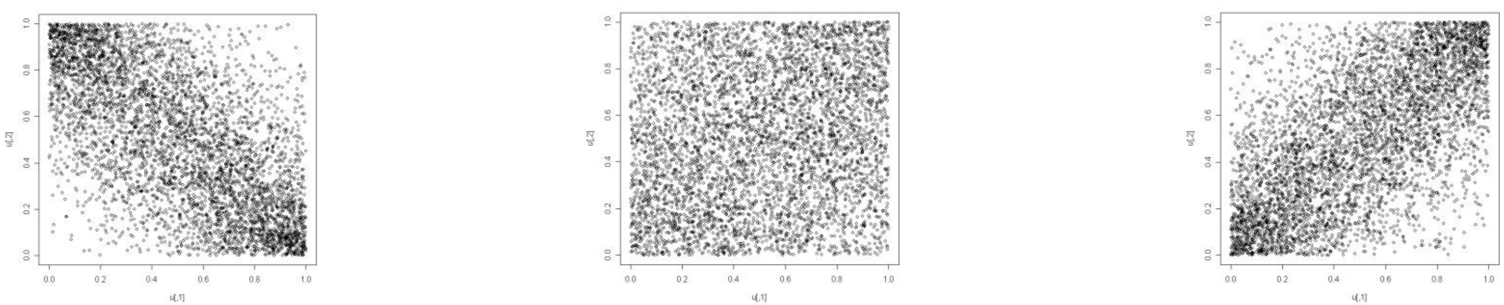
- **La diversificazione del rischio avviene mediante la compensazione tra le diverse Linee di Business**
- **Un valido strumento per l'aggregazione dei rami in ipotesi di dipendenza è rappresentato dalle copule.**
- **L'idea di base delle copule è quella di separare la dipendenza e le distribuzioni marginali da una distribuzione multivariata**

- ✓ *1940*: Hoeffding studia le proprietà delle distribuzioni multivariate
- ✓ *1959*: compare per la prima volta il termine **copula** (Sklar)
- ✓ *1998*: letteratura accademica sull'uso delle copule in ambito risk management
- ✓ *2004*: alcune compagnie di assicurazione ed istituzioni finanziarie iniziano ad usare le copule come strumento di risk management

Copula Normale → ellittica

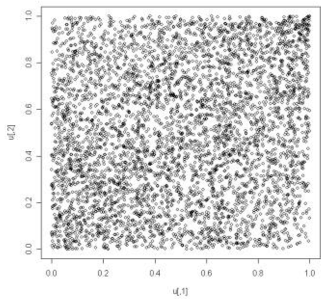


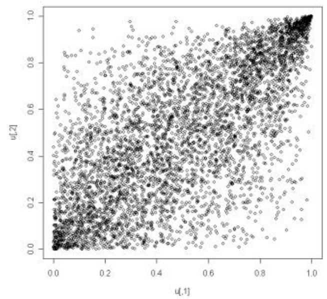
Frank → archimedea

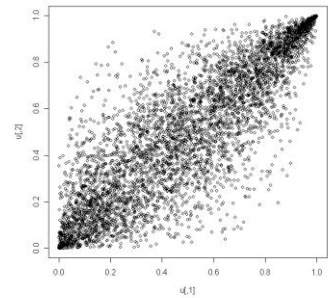


Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

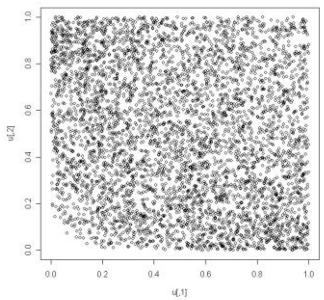
Copula Gumbel → archimedea

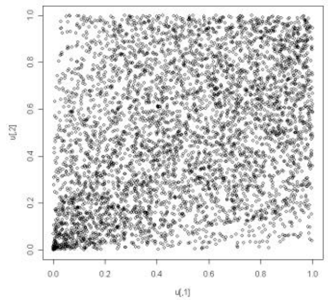


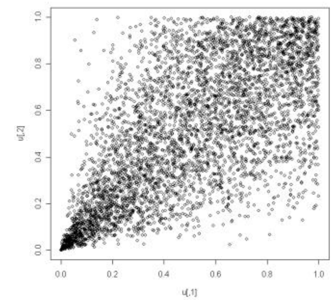




Clayton → archimedea



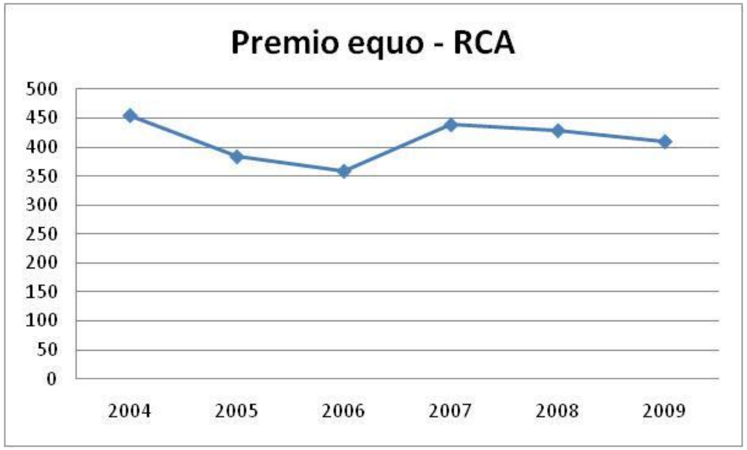


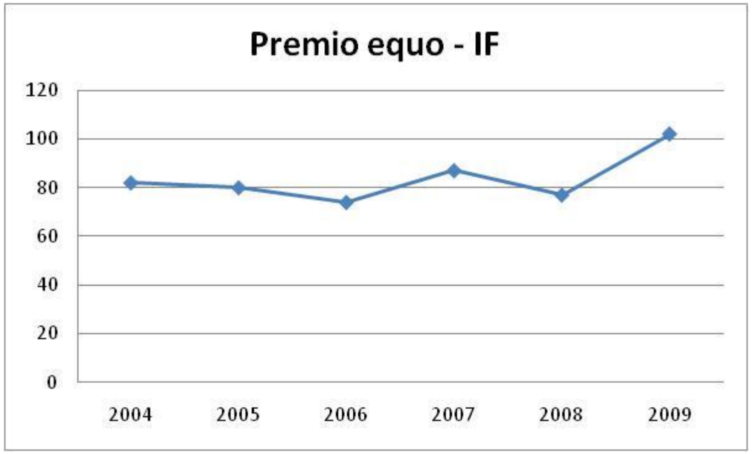


Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Statistica di riferimento: premi equi di ramo

✓ coefficiente di correlazione lineare: 0,30





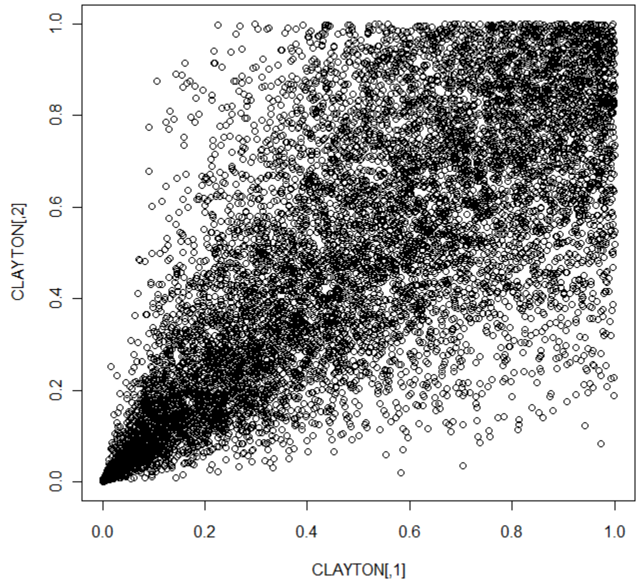
	PREMIO EQUO	
ANNI	RCA	IF
2004	455	82
2005	384	80
2006	359	74
2007	439	87
2008	429	77
2009	410	102

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

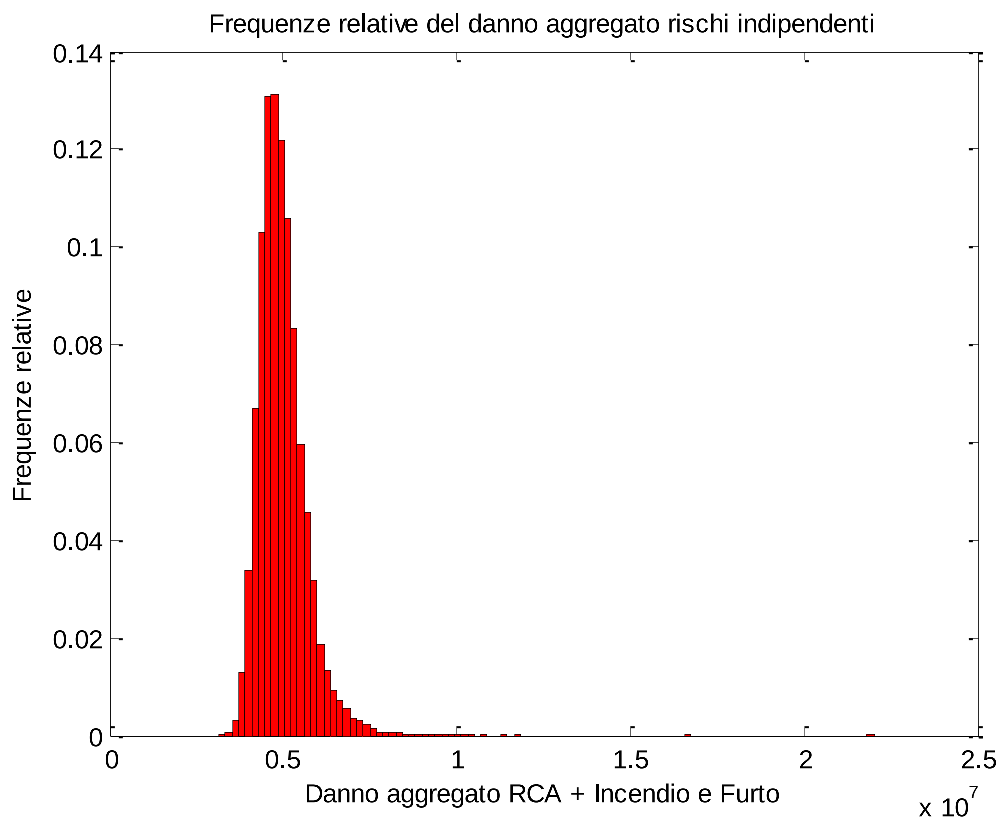
- **Criterio decisionale → CML :**

$$\boxed{\hat{\alpha}_{CML} = \arg\max_{\alpha} \sum_{i=1}^{n} \log c\left(U_{i1},\ldots,U_{ik};\alpha\right)}$$

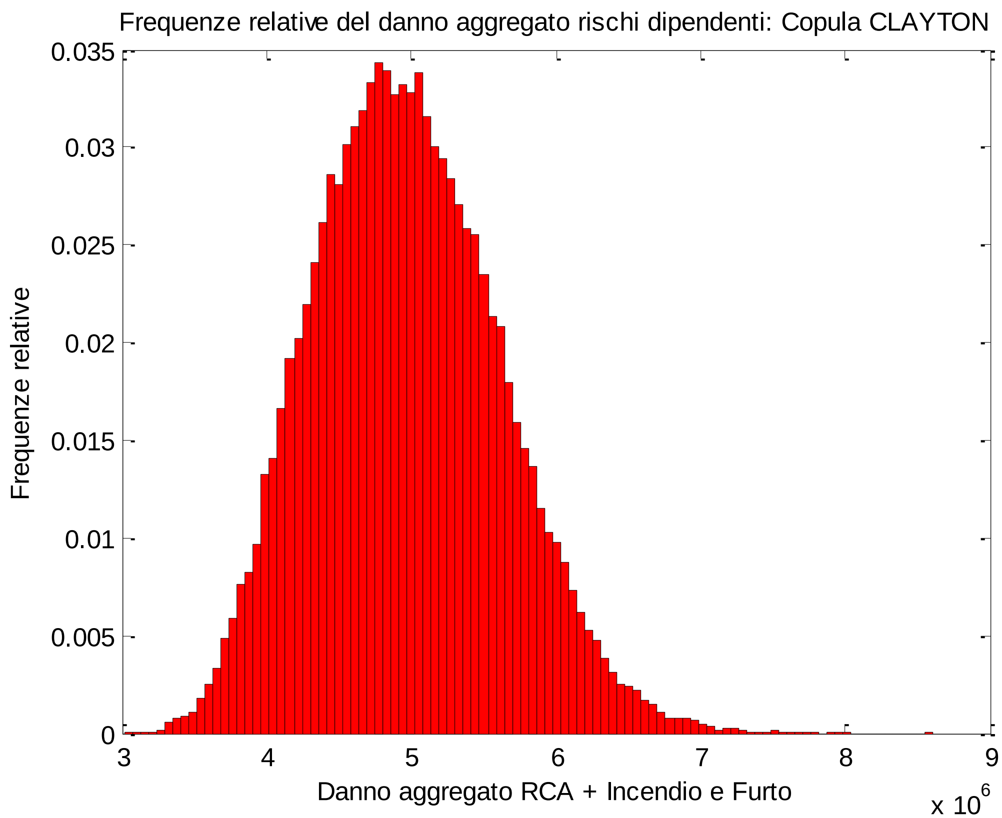
	PAR.	LOGVER.
CLAYTON	2,38	1,93
FRANK	4,39	0,84
NORMALE	0,72	1,16
GUMBEL	1,74	0,74



Danno Aggregato - INDIPENDENZA

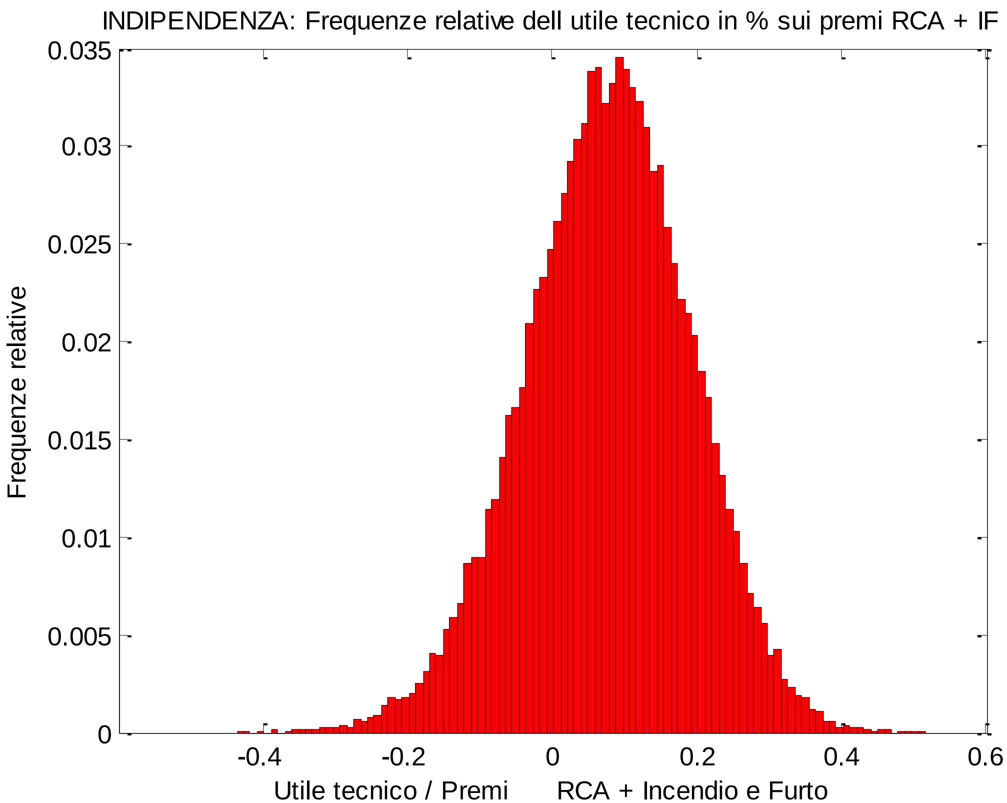


Danno Aggregato - CLAYTON



Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Utile Tecnico - INDIPENDENZA

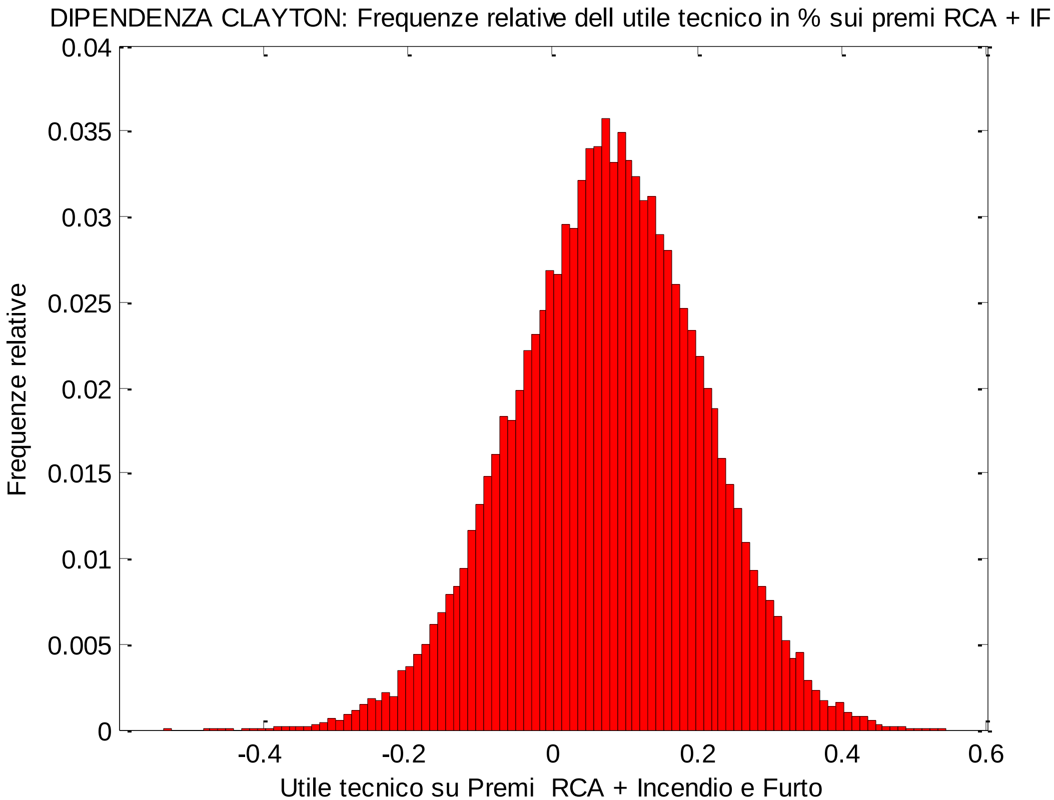


Percentile	UTILE/P
0,05%	-34,80%
0,50%	-23,63%
2,50%	-15,68%
25,00%	0,12%
50,00%	7,92%
75,00%	15,37%
97,50%	29,19%
99,50%	35,79%
99,95%	44,58%

Risk Capital (99,5%)/P	**23,63%**

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Utile Tecnico - CLAYTON



Percentile	U/Ptariffa
0,05%	-37,69%
0,50%	-26,93%
2,50%	-18,29%
25,00%	-0,88%
50,00%	7,83%
75,00%	16,36%
97,50%	32,08%
99,50%	39,43%
99,95%	46,74%

Risk Capital (99,5%)/P	**26,93%**

MODELLO INTERNO *vs* QIS5

Metodologia	$VaR_{99,5\%}/P$
Standard Formula LTGA	25,13%
Internal Model: Indipendenza	23,63%
Internal Model: Clayton	26,93%

CorrSegment (1,2)	0,50
N(0,995)	2,58

V(prem,segment 1)	5.452.400
σ,prem,segment 1	10%
ρ(σ,prem,segment 1)	28,71%
NL(pr,premium,segment 1)	1.565.326

V(prem,segment 2)	1.450.700
σ,prem,segment 2	8,0%
ρ(σ,prem,segment 2)	22,49%
NL(pr,premium,segment 2)	326.301

V(prem)	6.903.100
σ,prem	8,86%
ρ(σ,prem)	25,13%
NL(pr,premi)	1.735.072

SOMMA =	1.891.627
% =	-8,28%

Premium Risk: esempio 3 - modelli interni per il Premium Risk

- **Ipotesi**
  - <u>Rami assicurativi</u>:

    Ramo 8 – Incendio ed elementi naturali (→ segment 4 nel LTGA)
    Ramo 10 – R.C. autoveicoli terrestri (→ segment 1 nel LTGA)
  - <u>Numerosità del portafoglio</u>: 10.000 assicurati per ogni ramo

- **IPOTESI 1**
  - Numero di sinistri → $N \sim$ *Binomiale Negativa (a,b)*
    - $N \sim$ *Poisson* (Λ) dove Λ è v.a.
    - $\Lambda \sim$ *Gamma (a,b)*
  - Importo del singolo sinistro → $Y \sim$ *Lognormale* (η, ζ)
  - Danno aggregato → $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N$
    - dato $N = n$, le Y_i sono indipendenti e identicamente distribuite
    - dato $N = n$, la distribuzione delle Y_i non dipende da n
    - la distribuzione di N non dipende dalla distribuzione delle Y_i
  - Premio medio puro → $P = E(N) \cdot E(Y)$ (si considera un caricamento implicito)
  - Premio medio di tariffa → $PT = P + caricamenti = P + 30\% \cdot P$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Simulazione per singolo ramo – Numero di sinistri

Dalla distribuzione reale si ottengono i seguenti valori empirici:

Numero di sinistri

Stima dei parametri → metodo dei momenti

$$E(N)_{RAMO\,8} = 0{,}00761833 \qquad Var(N)_{RAMO\,8} = 0{,}00860124 \Rightarrow DevStd(N)_{RAMO\,8} = 0{,}09274289$$

La stima dei parametri viene ottenuta uguagliando i momenti empirici con quelli teorici:

$$E(N)_{RAMO\,10} = 0{,}07864258 \qquad Var(N)_{RAMO\,10} = 0{,}08496372 \Rightarrow DevStd(N)_{RAMO\,10} = 0{,}29148536$$

$$\mu = a \cdot b = E(N) \Rightarrow a = \frac{E(N)}{b}$$

$$\sigma^2 = a \cdot b \cdot (1+b) = Var(N) \Rightarrow \frac{E(N)}{b} \cdot b \cdot (1+b) = Var(N) \quad \Rightarrow E(N) + b \cdot E(N) = Var(N) \Rightarrow b = \frac{Var(N) - E(N)}{E(N)}$$

$$a_{RAMO8} = 0{,}0590475029 \qquad a_{RAMO10} = 0{,}9784085851$$

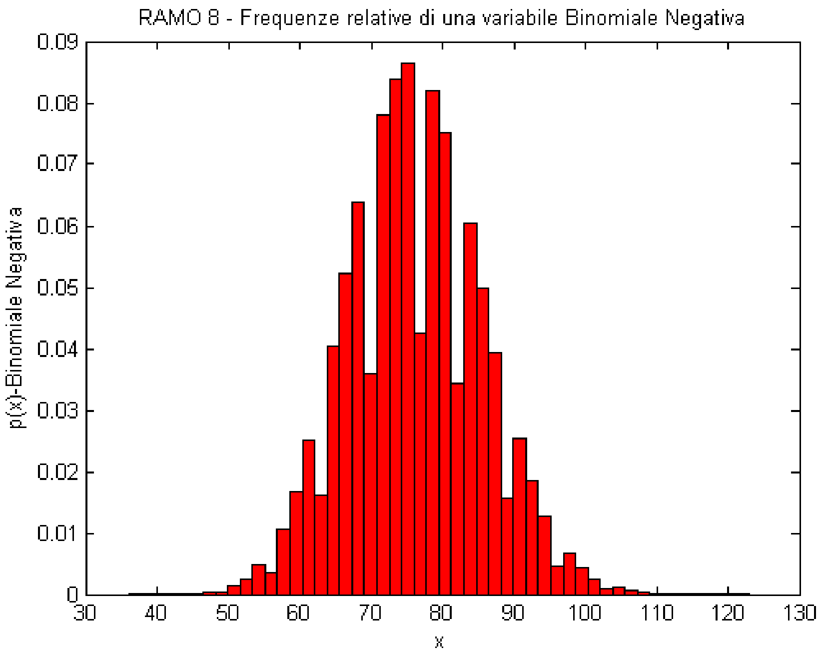
$$b_{RAMO8} = 0{,}1290202820 \qquad b_{RAMO10} = 0{,}0803780553$$

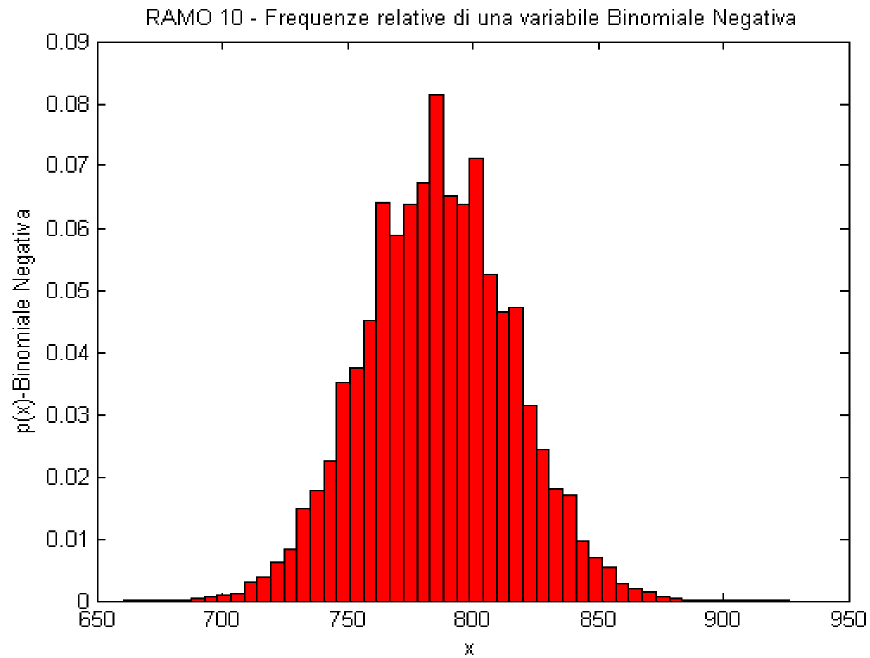
- **Proprietà della v.a. Gamma**

  Date N variabili indipendenti Λ_i distribuite secondo una Gamma di parametri a_i (con $i=1,2,\ldots,N$) e b, la v.a. "somma delle Λ_i", si distribuirà ancora come una Gamma con parametri $\sum_{i=1}^{N} a_i$ e b.

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Simulazione per singolo ramo – Numero di sinistri





Simulazione per singolo ramo – Numero di sinistri

Come previsto, la simulazione ha condotto alla "creazione" delle distribuzioni del "numero di sinistri" nelle quali i momenti empirici non si discostano molto dai momenti teorici:

Momenti teorici →

$$\mu(N)_{RAMO8} = 76{,}1833 \qquad \sigma(N)_{RAMO8} = 9{,}2743$$

$$\mu(N)_{RAMO10} = 786{,}4261 \qquad \sigma(N)_{RAMO10} = 29{,}1485$$

Momenti empirici→

$$\mu(N)^{*}_{RAMO8} = 76{,}1807 \qquad \sigma(N)^{*}_{RAMO8} = 9{,}2681$$

$$\mu(N)^{*}_{RAMO10} = 786{,}4198 \qquad \sigma(N)^{*}_{RAMO10} = 29{,}1318$$

Simulazione per singolo ramo – Importo del singolo sinistro

Importo del sinistro → Stima dei parametri → metodo dei momenti

Dalla distribuzione reale si ottengono i seguenti valori empirici:

$$E(Y)_{RAMO\,8} = 3.093 \qquad Var(Y)_{RAMO\,8} = 35.315.120 \Rightarrow DevStd(Y)_{RAMO\,8} = 5.943$$

$$E(Y)_{RAMO\,10} = 3.364 \qquad Var(Y)_{RAMO\,10} = 115.576.297 \Rightarrow DevStd(Y)_{RAMO\,10} = 10.751$$

La stima dei parametri viene ottenuta uguagliando i momenti empirici con quelli teorici:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= e^{\eta+\frac{\zeta^2}{2}} \\ \sigma^2 &= \mu^2 \cdot (e^{\zeta^2} - 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \eta = \ln\left(\frac{[E(Y)]^2}{\sqrt{Var(Y) + [E(Y)]^2}}\right) \qquad \zeta = \sqrt{\ln\left(\frac{Var(Y) + [E(Y)]^2}{[E(Y)]^2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_{RAMO\,8} = 7{,}26416428 \qquad \eta_{RAMO\,10} = 6{,}91246412$$

$$\zeta_{RAMO\,8} = 1{,}24323117 \qquad \zeta_{RAMO\,10} = 1{,}55466008$$

Simulazione per singolo ramo – Importo del singolo sinistro

Come previsto, la simulazione ha condotto alla "creazione" delle distribuzioni del "importo del singolo sinistro" nelle quali i momenti empirici non si discostano molto dai momenti teorici:

Momenti teorici →

$$\mu(Y)_{RAMO\,8} = 3.093 \qquad \sigma(Y)_{RAMO\,8} = 5.943$$

$$\mu(Y)_{RAMO\,10} = 3.364 \qquad \sigma(Y)_{RAMO\,10} = 10.751$$

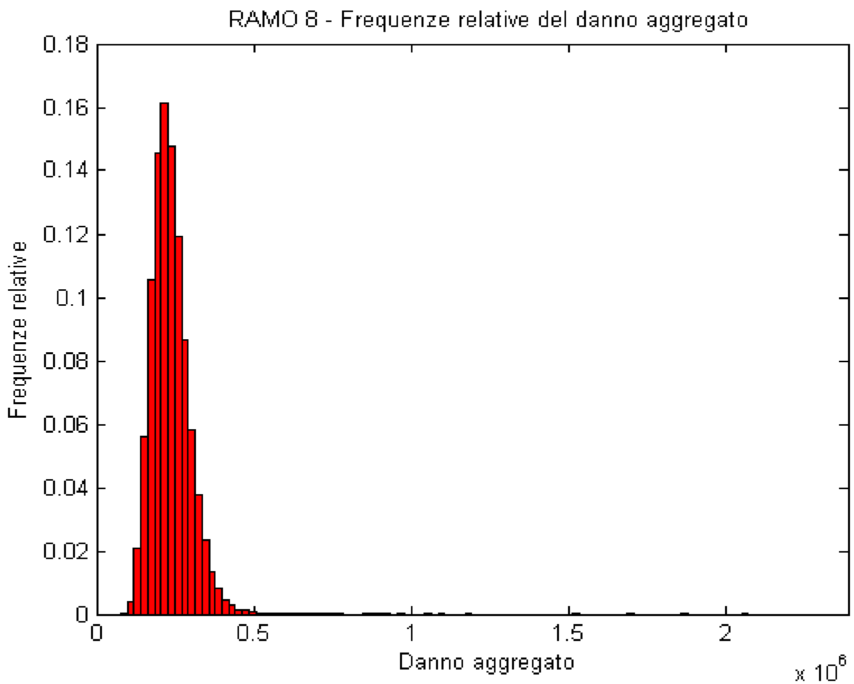
Momenti empirici→

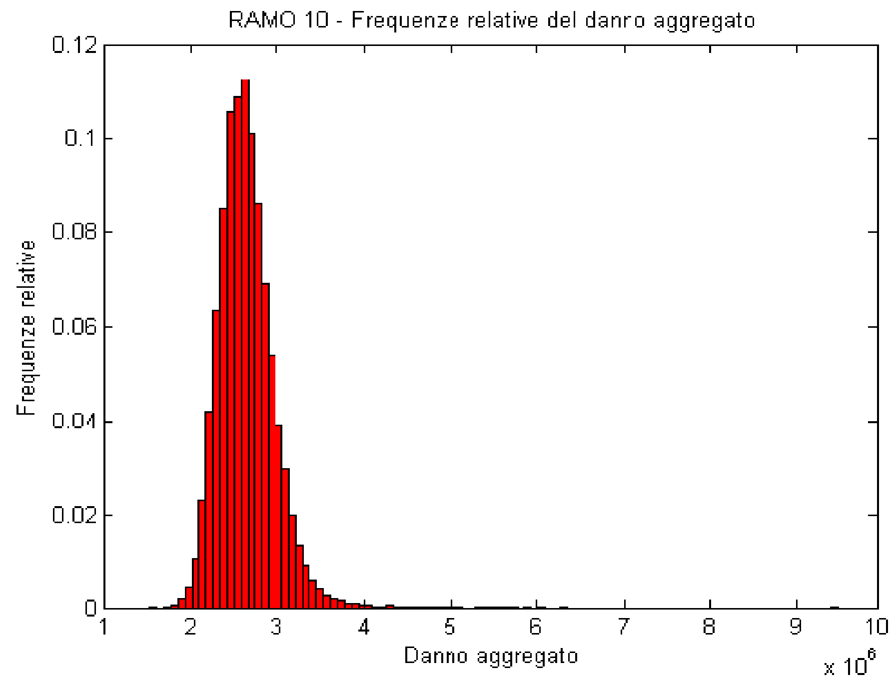
$$\mu(Y)^{*}_{RAMO\,8} = 3.100{,}7 \qquad \sigma(Y)^{*}_{RAMO\,8} = 5.923{,}1$$

$$\mu(Y)^{*}_{RAMO\,10} = 3.348 \qquad \sigma(Y)^{*}_{RAMO\,10} = 10.390$$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Simulazione per singolo ramo – Costo aggregato





Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Simulazione per singolo ramo – Costo aggregato

Come previsto, la simulazione ha condotto alla "creazione" delle distribuzioni del "costo aggregato" nelle quali i momenti empirici non si discostano molto dai momenti teorici:

$$E(X) = E(N) \cdot E(Y) \cdot N.Ass$$

$$Var(X) = E(N) \cdot N.Ass \cdot Var(Y) + Var(N) \cdot N.Ass \cdot [E(Y)]^2$$

Momenti teorici →

$$\mu(X)_{RAMO\,8} = 235.654 \qquad \sigma(X)_{RAMO\,8} = 59.274$$

$$\mu(X)_{RAMO\,10} = 2.645.701 \qquad \sigma(X)_{RAMO\,10} = 317.030$$

Momenti empirici→

$$\mu(X)^*_{RAMO\,8} = 235.600 \qquad \sigma(X)^*_{RAMO\,8} = 59.711$$

$$\mu(X)^*_{RAMO\,10} = 2.645.648 \qquad \sigma(X)^*_{RAMO\,10} = 317.824$$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Riserva di rischio

$$U_1 = (P - X - E)\cdot(1+j)^{-0,5}$$

Premio di tariffa

dai dati empirici
$P_{medio} = Costo_{medio} \cdot Freq_{sinistri} \rightarrow P_{tariffa} = P_{medio} + caricamento$

RAMO 8

Costo Medio	Frequenza sinistri	Premio medio puro	Premio di tariffa
(1)	(2)	(3)=(1)*(2)	(4)=(3)+0,30*(3)
3.093	0,76%	24	31

Ipotesi di caricamento: 30%

RAMO 10

Costo Medio	Frequenza sinistri	Premio medio puro	Premio di tariffa
(1)	(2)	(3)=(1)*(2)	(4)=(3)+0,30*(3)
3.364	7,86%	265	344

Ipotesi di caricamento: 30%

Spese $\rightarrow E \sim Lognormale(\eta,\zeta)$

per ipotesi $E(E)$ = 20% * P_{medio} , $DevStd(E)$=20% * $E(E)$ da cui vengono stimati i parametri della LogNormale:

Ramo 8		Ramo 10	
Media Spese	Std Spese	Media Spese	Std Spese
(5)=0,20*(3)	(6)=0,20*(5	(5)=0,20*(3)	(6)=0,20*(5)
4,71	0,94	52,91	10,58

$$\eta^E_{RAMO8} = 1,53072921 \qquad \zeta^E_{RAMO8} = 0,19804220$$

$$\eta^E_{RAMO10} = 3,94905784 \qquad \zeta^E_{RAMO10} = 0,1980422$$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Riserva di rischio – dipendenza tra i rami

per singolo ramo → eseguire <u>congiuntamente</u> le simulazioni del numero di sinistri e dell'importo del singolo sinistro al fine di determinare il danno aggregato e delle spese

per il complesso del portafoglio

Danno aggregato → $X \sim Lognormale\ (\eta, \zeta)$

$$X = X_8 + X_{10}$$

$$E(X) = E(X_8 + X_{10}) = E(X_8) + E(X_{10})$$

$$E(X_i) = E(N_i) \cdot E(Y_i) \cdot n.ass$$

$$Var(X) = Var(X_8) + Var(X_{10}) + 2 \cdot \rho \cdot \sigma(X_8) \cdot \sigma(X_{10})$$

$$Var(X_i) = E(N_i) \cdot n.ass \cdot Var(Y_i) + Var(N_i) \cdot n.ass \cdot [E(Y_i)]^2$$

- ρ = indice di correlazione lineare tra i rami → ipotesi del QIS5, $\rho = 0{,}25$
- calcolo della media e della deviazione standard
- stima dei parametri della Lognormale (metodo dei momenti)

$E(X) = 2.881.354$

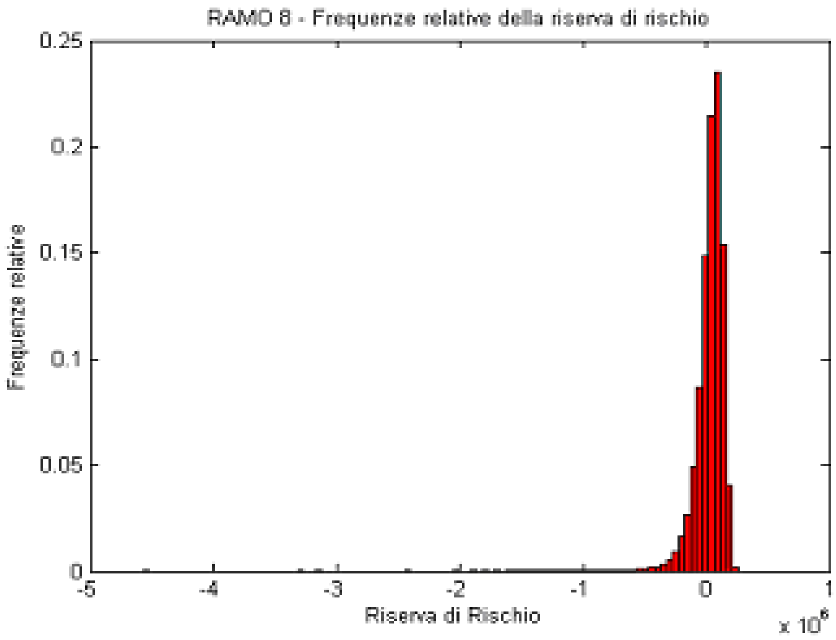
$Var(X) = 122.813.342.117$

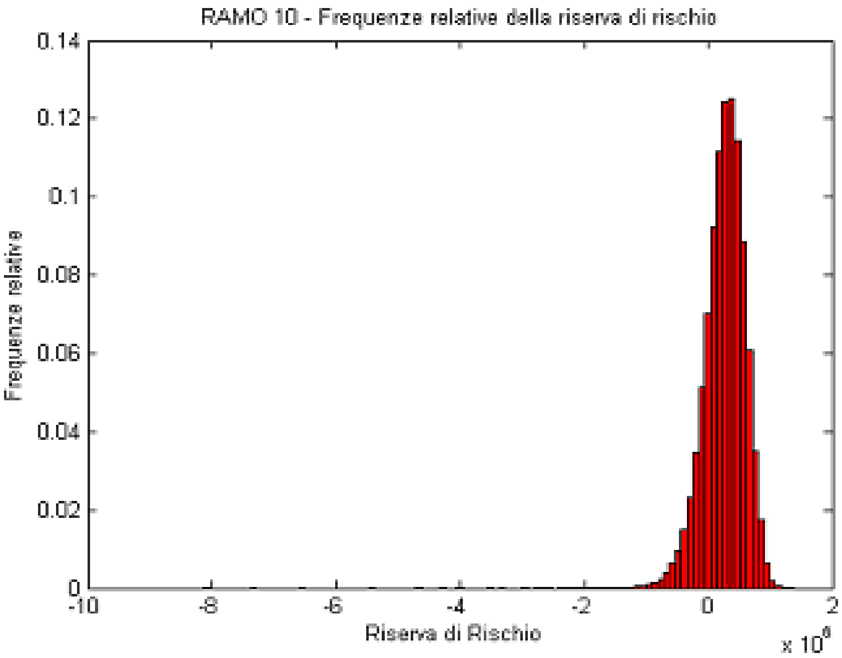
$$\eta_S = 14{,}8664287$$

$$\zeta_S = 0{,}1211797$$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Riserva di rischio – singolo ramo



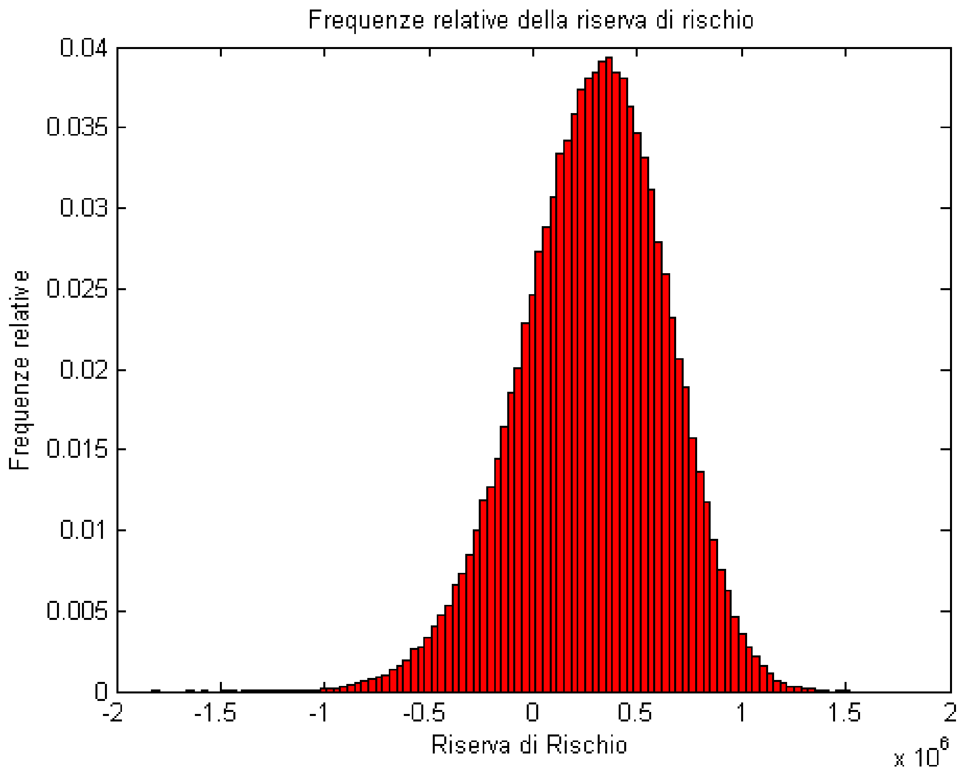


Ramo 8 → - $VaR^{0,5\%}\left(U_1^{RAMO8}\right) = 178.440$

Ramo 10 → - $VaR^{0,5\%}\left(U_1^{RAMO10}\right) = 840.960$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

<u>Riserva di rischio </u>– complesso del portafoglio – dipendenza tra i rami



$$-VaR^{0,5\%}\left(U_1\right) = 706.320$$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

Riserva di rischio – complesso del portafoglio – dipendenza tra i rami

$\frac{U_1}{P}$ ⇒ vettore ottenuto come rapporto tra l'utile totale e l'ammontare dei premi per i due rami

$-VaR\left(\frac{U_1}{P}\right)$ ⇒ capitale a rischio per ogni unità monetaria

Percentile	$VaR\left(\frac{U_1}{P}\right)$
50,00%	8,11%
75,00%	1,72%
97,50%	-11,79%
99,50%	-18,83%
Media	**7,69%**

18,83% è la percentuale di capitale che l'assicuratore deve accantonare per ogni unità monetaria incassata

Numero di assicurati	$-VaR^{0,5\%}(U_1)$	$VaR^{0,5\%}\left(\frac{U_1}{P}\right)$
10.000	**706.320**	**-18,83%**
12.000	749.450	-16,65%
14.000	782.160	-14,90%
16.000	809.180	-13,48%
18.000	830.090	-12,30%
20.000	857.800	-11,40%

Al crescere della numerosità del portafoglio, il capitale a rischio

- aumenta in termini assoluti
- diminuisce in termini percentuali

Confronto dei risultati (hp 1)

$-VaR^{0,5\%}(U_1) = 706.320$

Analisi congiunta dei rami → $-VaR^{0,5\%}$ dell'utile è il capitale a rischio che deve detenere la Compagnia;

Analisi per singolo ramo →

Ramo 8 → $-VaR^{0,5\%}(U_1) = 178.440$

Ramo 10 → $-VaR^{0,5\%}(U_1) = 840.960$

$$\left[-VaR^{0,5\%}\left(U_1^{RAMO8}\right)\right]+\left[-VaR^{0,5\%}\left(U_1^{RAMO10}\right)\right]>-VaR^{0,5\%}\left(U_1\right)$$

EFFETTO DELLA DIVERSIFICAZIONE

L'aggregazione dei due rami determina una riduzione di capitale a rischio e quindi una riduzione del rischio di tariffazione

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

IPOTESI 2

La variabile *X+E* si distribuisce come:

$$(X+E) \sim LogNormale(\eta, \zeta)$$

dove:

$$\eta = \ln\left(\frac{[E(X+E)]^2}{\sqrt{Var(X+E)+[E(X+E)]^2}}\right) \qquad \zeta = \sqrt{\ln\left(\frac{Var(X+E)+[E(X+E)]^2}{[E(X+E)]^2}\right)}$$

$E(X+E) = E(X) + E(E)$

$Var(X+E) = Var(X) + Var(E)$ (*)

$E(X) = E(N) * E(Y) * N.ass$

$Var(X) = E(N) * N.ass * Var(Y) + Var(N) * N.ass * [E(Y)]^2$

$E(E) = 20\% * P_{medio}$

$DevStd(E) = 20\% * E(E)$

(*) Si ipotizza indipendenza tra la v.a. *X* e la v.a. *E*

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

$$E[X_1 + X_4 + E_1 + E_4] = E[X_1] + E[X_4] + E[E_1] + E[E_4] = 3.457.406$$

$$Var(X_1 + X_4 + E_1 + E_4) = Var(X_1 + E_1) + Var(X_4 + E_4) + 2 \cdot \rho \cdot \sqrt{Var(X_1 + E_1) \cdot Var(S_4 + E_4)} =$$
$$= Var(X_1) + Var(E_1) + Var(X_4) + Var(X_4) + 2 \cdot \rho \cdot \sqrt{[Var(X_1) + Var(X_1)] \cdot [Var(X_4) + Var(E_4)]} =$$
$$= 125.337.030.369$$

$$\boxed{-VaR_{0,5}(U_1) = VaR_{99,5}(X + E) - P = 728.886}$$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

NA	10.000
E(N1)	7,86%
VAR(N1)	8,50%
E(Y1)	3.364
VAR(Y1)	115.576.297
E(X1)	2.645.536
VAR(X1)	100.507.097.805
E(E1)	529.107
VAR(E1)	11.198.180.475
E(X1+E1)	3.174.644
VAR(X1+E1)	111.705.278.280
DS(X1+E1)	334.223
PREMI(1)	3.439.197
A	14,965
B	0,105
VAR[99,5;(X1+E1)]	4.137.608
SCR(1)	698.411

NA	10.000
E(N4)	0,76%
VAR(N4)	0,86%
E(Y4)	3.093
VAR(Y4)	35.315.120
E(X4)	235.635
VAR(X4)	3.513.272.822
E(E4)	47.127
VAR(E4)	88.838.125
E(X4+E4)	282.762
VAR(X4+E4)	3.602.110.947
DS(X4+E4)	60.018
PREMI(4)	306.325
C	12,530
D	0,210
VAR[99,5;(X4+E4)]	474.989
SCR(4)	168.664

CorrSegment	0,25
E(X1+E1+X4+E4)	3.457.406
VAR(X1+E1+X4+E4)	125.337.030.369
DS(X1+E1+X4+E4)	354.030
PREMI(1+4)	3.745.523
F	15,051
G	0,102
VAR[99,5;(X1+E1+X4+E4)]	4.474.408
SCR(1+4)	728.886

$$\eta = \ln\left(\frac{[E(X)]^2}{\sqrt{Var(X)+[E(X)]^2}}\right)$$

$$\zeta = \sqrt{\ln\left(\frac{Var(X)+[E(X)]^2}{[E(X)]^2}\right)}$$

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

IPOTESI 3

Il requisito di capitale secondo la Formula Standard del LTGA

$Corrl_{ob4,1}$	0,25
$N_{0.995}$	2,58

$V_{prem,lob4}$	310.000
$\sigma_{prem,lob4}$	8,0%
$\rho(\sigma_{prem,lob4})$	22,49%
$NL_{prem,lob4}$	**69.727**

$V_{prem,lob1}$	3.439.411
$\sigma_{prem,lob1}$	10,0%
$\rho(\sigma_{prem,lob1})$	28,71%
$NL_{prem,lob1}$	**987.418**

V_{prem}	3.749.411
σ_{prem}	9,36%
$\rho(\sigma_{prem})$	26,70%
NL_{prem}	**1.000.905**

$$NL_{pr,premi,lob4} + NL_{pr,premi,lob1} = 69.727 + 987.418 = 1.057.145 > NL_{pr,premi} = 1.000.905$$

Confronti

	LTGA	MI(N,Y)	MI(X)
SCR(X_1)	987.418	840.960	698.411
SCR(X_4)	69.727	178.440	168.664
SCR(X_1+X_4)	1.000.905	706.320	728.886

Premium Risk: modelli interni per il Premium Risk

- **Riduzione di rischio di tariffazione**:
  - aggregazione dei rami
  - aumento della dimensione del portafoglio
- Il modello interno nel precedente esempio numerico determina una minore necessità di capitale, in relazione al
  - Portafoglio Ramo 8 + Ramo 10
  - Portafoglio Ramo 10

  ad eccezione del portafoglio costituito esclusivamente dal Ramo 8 → la Formula Standard sottostima la variabilità del Ramo
- In generale
  - il modello interno permette la valutazione del rischio effettivo cui è esposta un'impresa, ma richiede un costo elevato per la sua implementazione e una maggiore quantità di dati disponibili (numero sinistri e costo dei sinistri)
  - il modello standard ha una natura semplice e flessibile, può essere usato da ogni Impresa, ma si fonda essenzialmente sull'ammontare dei premi di tariffa

Riferimenti Bibliografici

[1] Alexander J. McNeil, Rudiger Frey, Paul Embrechts (2005). *Quantitative risk manager: concepts, techniques and tools.* Princeton University Press.

[2] Alois Gisler (2009), *The Insurance Risk in the SST and in Solvency II:Modelling and Parameter Estimation,* http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Helsinki/Papers/S3_24_Gisler.pdf

[3] EIOPA, 2012, *Technical Specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculation (Part I)*, (pdf available on web).

[4] Daykin C.D., T. Pentikäinen, M. Pesonen (1984). *Pratical risk theory for actuaries.* London Chapman & Hall.

[5] European Commission, 2009, *Solvency II directive*, (pdf available on web).

[6] Forte S., Ialenti M., Pirra M. (2011). *Gli effetti della dipendenza dei rischi sul pricing di una copertura congiunta incendio e furto ed r.c.auto.* I Riunione Scientifica Sapienza Roma.

[8] IIA (2010). *Stochastic Modeling. Theory and reality from an actuarial perspective.* Ottawa, Ontario, Canada.

[9] L. Daboni (1989). *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni.* LINT, Trieste.

[10] Sandström, Arne (2006). *Solvency: models, assessment and regulation.* Chapman&Hall/CRC.

[11] Stuart A. Klugman, Harry J. Panjer, Gordon E. Willmot (2008). *Loss Models: from data to decisions*. John Wiley & Sons.

Modelli interni per il Reserve Risk e tecniche di Re-reserving e Backtesting

Il Rischio di Riservazione

- ✓ **Il rischio di riservazione rappresenta il rischio che le riserve sinistri possedute dalla compagnia possano non essere sufficienti rispetto agli impegni assunti verso assicurati (e danneggiati). Tale rischio si origina da due fonti distinte: :**

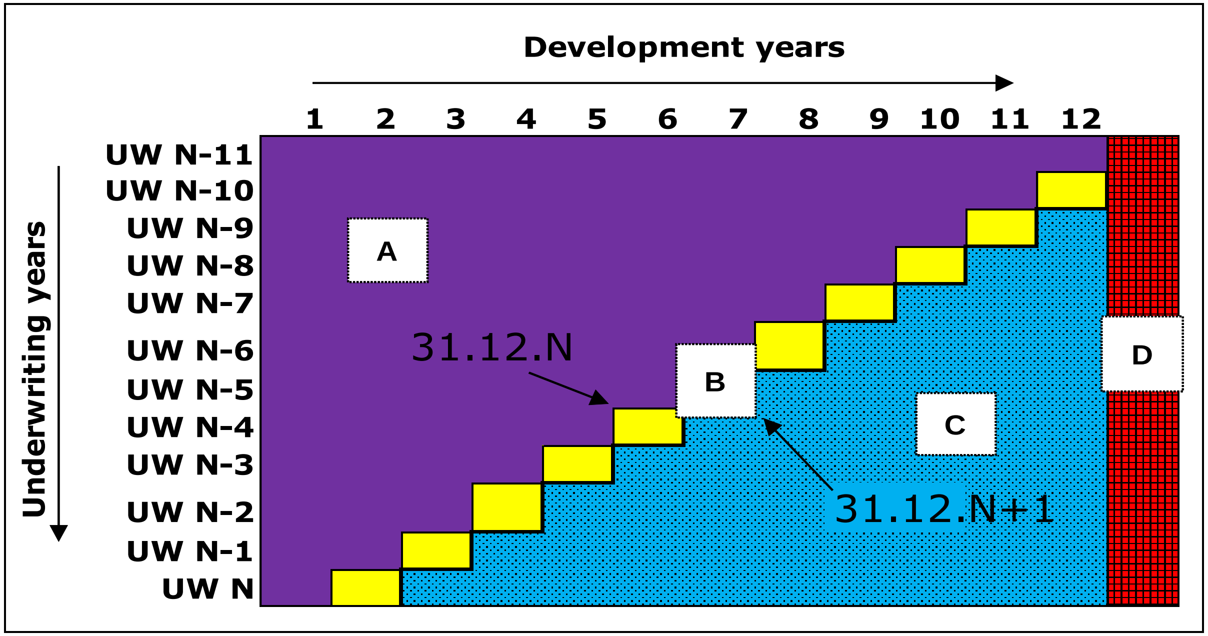
  1. **il valore assoluto della riserva può risultare errato a causa di procedure inadeguate nella stima;**
  2. **il valore della riserva, stante la natura stocastica delle liquidazioni future dei sinistri, può oscillare intorno al valore medio.**

- ✓ **La compagnia deve possedere un capitale a fronte di tale rischio (*Reserve Risk Capital – RRC*) determinato con:**

  - **metodologia VaR**
  - **orizzonte di tempo annuale**
  - **probabilità di rovina pari a 0,5%**

Il Rischio di Riservazione

Il rischio di riservazione dovrebbe tener conto sia degli eventi avversi che possono avvenire nell'orizzonte temporale di un anno (*shock period*), sia delle loro conseguenze finanziarie sulle riserve tecniche fino alla loro completa estinzione (*effect period*).



A. **Dati disponibili**
B. **"Shock period"**
C. **"Effect period"**
D. **Costi ultimi**

La maggior parte dei metodi stocastici proposti in letteratura non sono però consistenti con tale struttura perchè considerano la variabilità su tutto il triangolo run-off dei pagamenti futuri, e quindi è come se prendessero in considerazione i possibili eventi avversi non soltanto nello shock period ma anche durante l'effect period.

Il Rischio di Riservazione: modello standard

$$\boxed{RRC_{pr} = 3 \times \sigma \times V}$$

$$\Downarrow$$

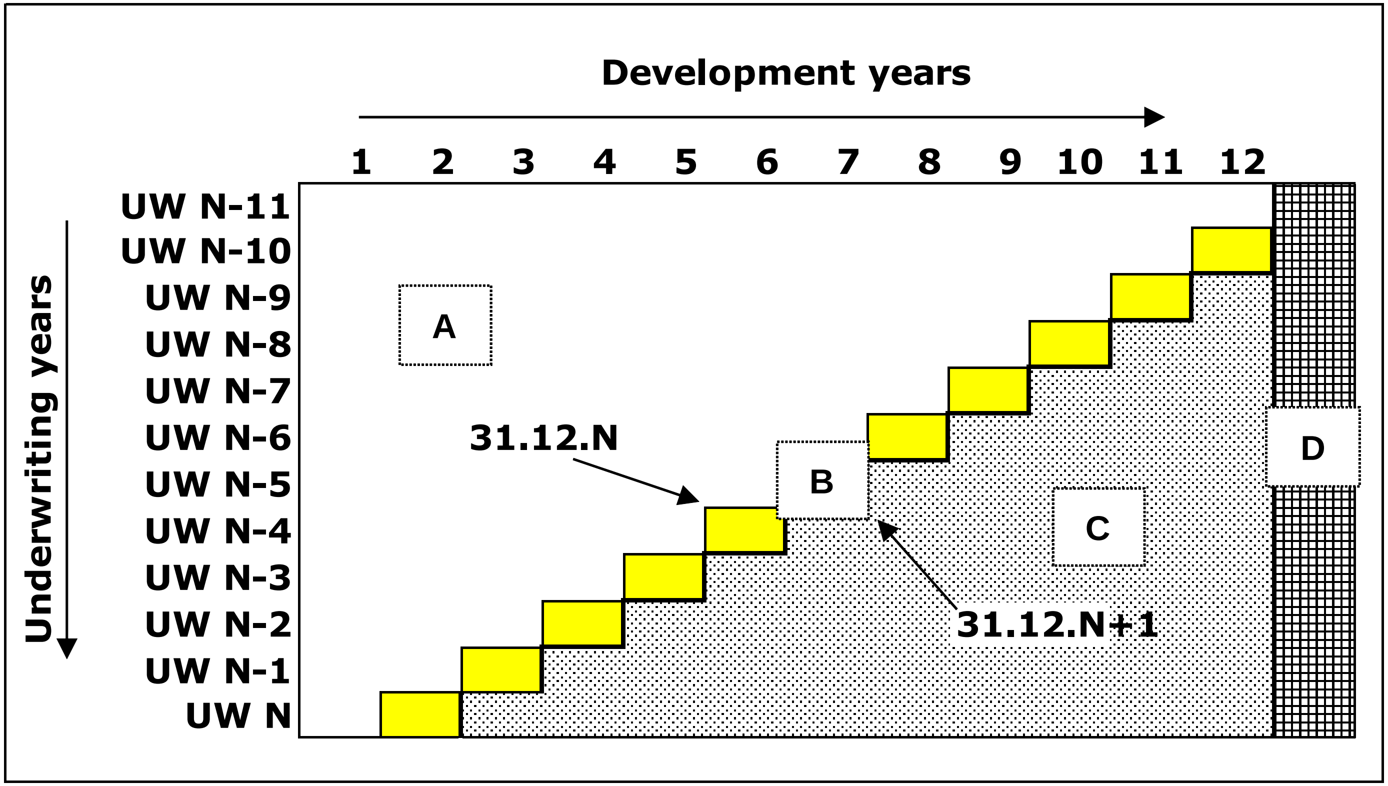
V : **best estimate della riserva sinistri al netto dell'effetto riassicurativo per singolo ramo (lob)**

σ **: coefficiente di variazione del rischio di riservazione**

$3 \cdot \sigma$: **approssimazione del Var al 99,5% di una distribuzione lognormale con media pari a V e coefficiente di variazione pari a σ**

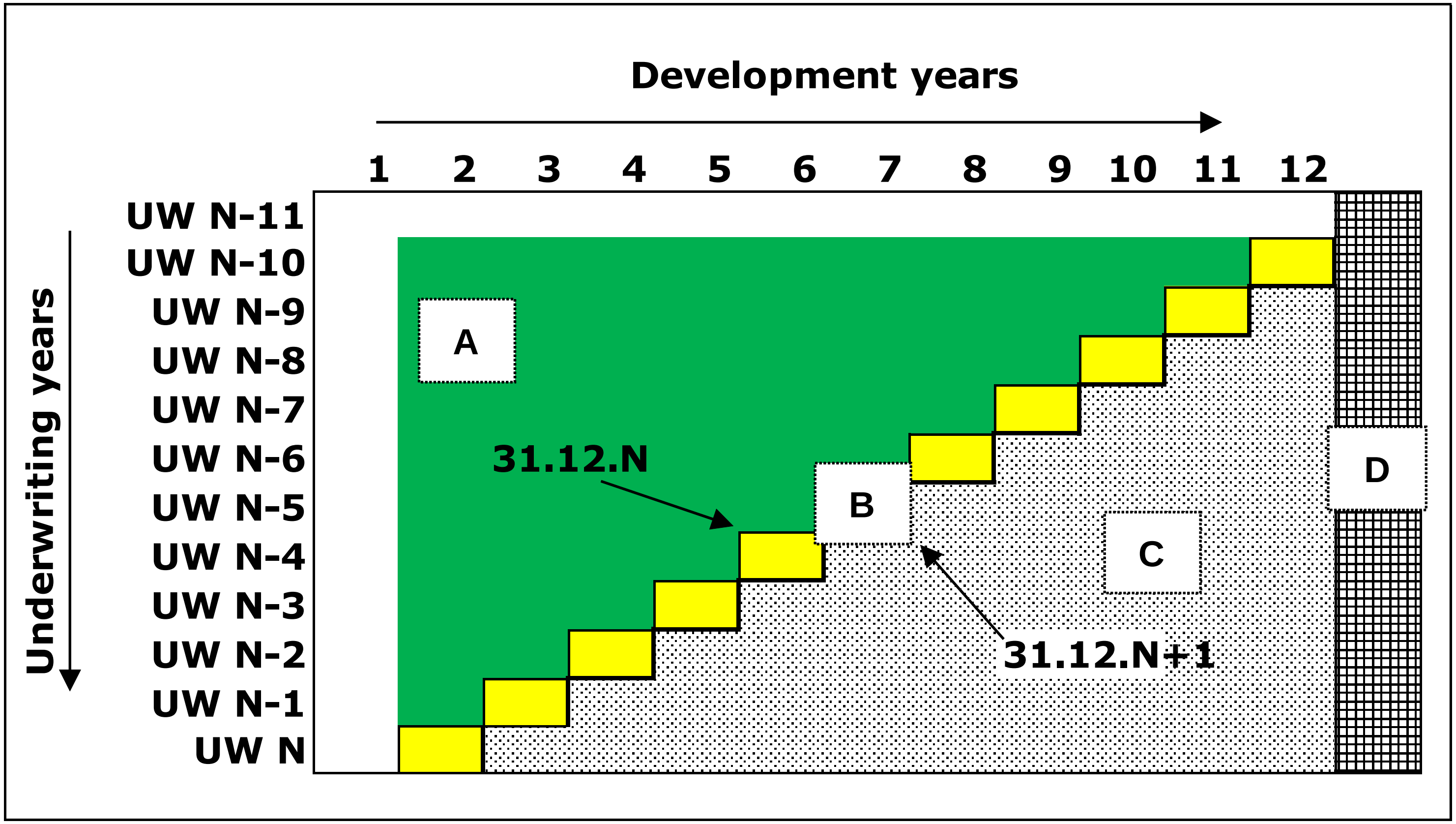
Il metodo del re-reserving

Per superare tale limite dei modelli stocastici è stata proposta, in un lavoro del 2007 dell'AISAM-ACME, la seguente metodologia da applicare su ognuna delle storie simulate:



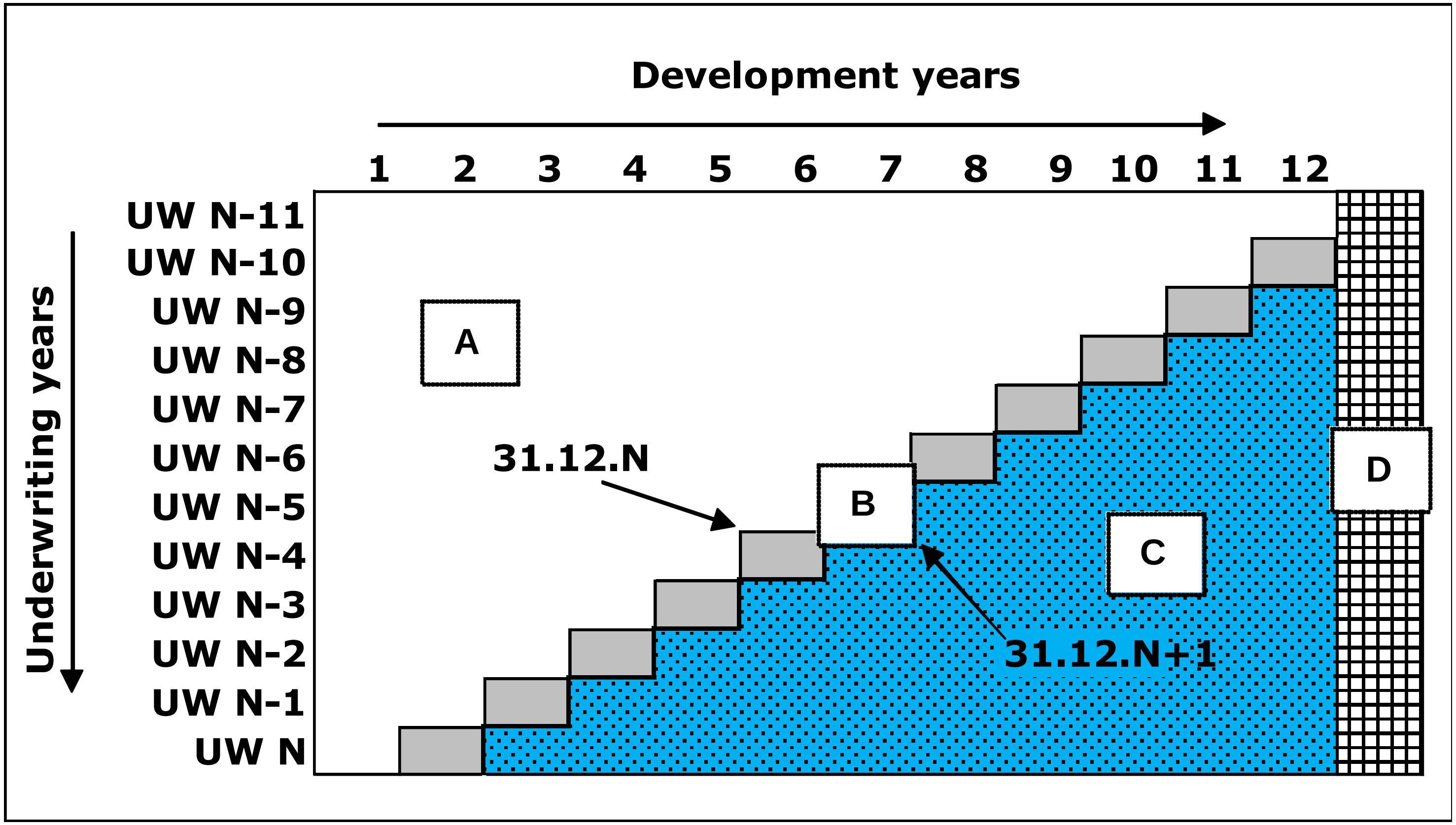
1. si simulano i valori relativi alla prima diagonale (shock period – Area B) con il modello stocastico prescelto;

Il metodo del re-reserving



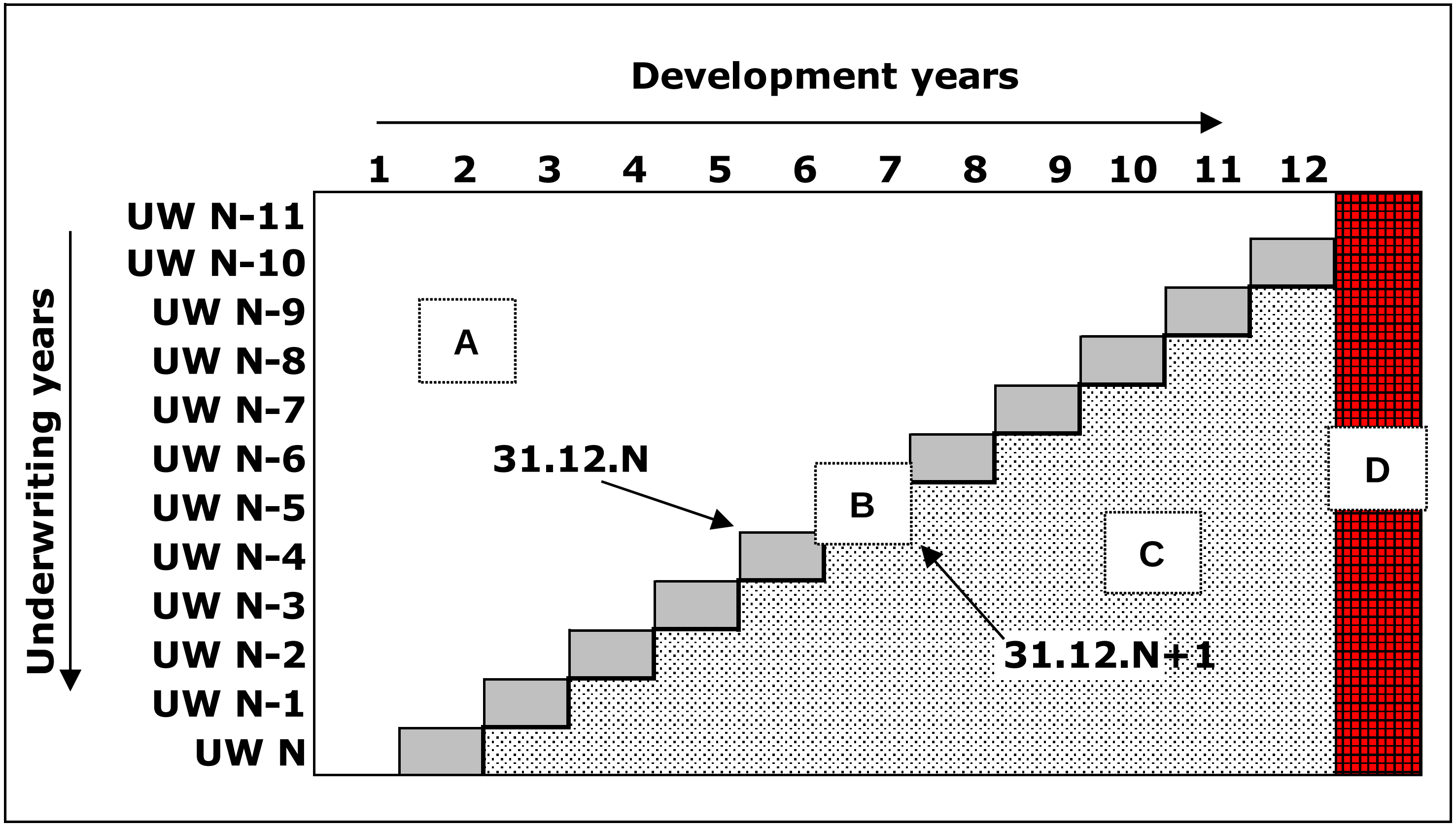
2. tali valori simulati vengono aggiunti al triangolo run-off iniziale (Area A) per formare un nuovo triangolo che presenta una diagonale in più. Tale aggiunta permette di considerare gli eventi simulati-avvenuti nell'orizzonte temporale di un anno.

Il metodo del re-reserving



3. si applica al triangolo ottenuto nel punto 2 un metodo deterministico, coerente con il modello stocastico usato nel punto 1, per stimare tutti i pagamenti futuri dall'anno N+1 in poi (effect period – Area C). In questo modo si tiene conto degli effetti finanziari lungo tutto il periodo di smontamento della passività.

Il metodo del re-reserving



4. il costo ultimo per generazione è ottenuto combinando i pagamenti relativi allo shock period, stimati nel punto 1, con i pagamenti relativi all'effect period, determinati nel punto 3.

Il metodo del re-reserving - Riepilogo

Step del Re-Reserving

1. **si simulano i valori relativi alla prima diagonale (shock period – Area B) con il modello stocastico prescelto;**
2. **tali valori simulati vengono aggiunti al triangolo run-off iniziale (Area A) per formare un nuovo triangolo che presenta una diagonale in più. Tale aggiunta permette di considerare gli eventi avversi simulati-avvenuti nell'orizzonte temporale di un anno.**
3. **si applica al triangolo ottenuto nel punto 2 un metodo deterministico, coerente con il modello stocastico usato nel punto 1, per stimare tutti i pagamenti futuri dall'anno N+1 in poi (effect period – Area C). In questo modo si tiene conto degli effetti finanziari degli eventi avversi lungo tutto il periodo di smontamento della passività.**
4. **il costo ultimo per generazione è ottenuto combinando i pagamenti relativi allo shock period, stimati nel punto 1, con i pagamenti relativi all'effect period, determinati nel punto 3.**

Modelli stocastici “classici”

1. **CHAIN LADDER DISTRIBUTION FREE (CL-DF)**
2. **OVER DISPERSED POISSON CON BOOTSTRAPPING (CL-BOOT)**

Chain Ladder Distribution Free (Mack Model)

- **Il CL-DF (Mack 1993) è un'estensione stocastica del modello CL Paid deterministico.**

- **Ipotesi:**

  1. esistono dei fattori di sviluppo λ_j >0 t.c. $E\left[Z_{i,j+1} \middle| Z_{i1},\ldots,Z_{i,j}\right] = \lambda_j \cdot Z_{ij}$

  2. il metodo del Chain-Ladder si fonda sull'ipotesi che la legge di smontamento dei sinistri sia uguale per tutti gli anni di avvenimento, ovvero **i pagamenti relativi a differenti generazioni sono tra loro indipendenti**

  3. la varianza dei fattori di sviluppo debba **essere inversamente proporzionale** ai pesi della media ponderata rappresentati dai pagamenti cumulati . Ciò equivale a ipotizzare che: **:**

$$Var\left(Z_{i,j+1} \middle| Z_{i1},\ldots,Z_{i,j}\right) = \alpha_j^2 \cdot Z_{ij}$$

Chain Ladder Distribution Free (Mack Model)

Formule di calcolo del modello di Mack:

1) Stimatori dei fattori di sviluppo

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Z_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} Z_{i,j}}$$

2) Stimatori dei fattori di proporzionalità

$$\widehat{\alpha}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} Z_{ij} \cdot \left(\frac{Z_{i,j+1}}{Z_{i,j}} - \widehat{\lambda}_j \right)^2 \qquad j = 1, \ldots, n-2$$

3) *process variance* della riserva relativa alla generazione i-esima:

$$Var\left(R_i\right) = \widehat{Z}_{in}^2 \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\alpha}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2 \cdot \widehat{Z}_{ik}}$$

Chain Ladder Distribution Free (Mack Model)

4) l'*estimation variance* relativa alla generazione i-esima:

$$Var\left(\widehat{R}_i\right) = \widehat{Z}_{in}^2 \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\alpha}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2 \cdot \sum_{q=1}^{n-k} Z_{q,k}}$$

5) varianza totale della riserva per singola generazione (si può ottenere anche come somma della *process variance* e dell'*estimation variance* , avendo ipotizzato l'indipendenza tra le osservazioni del passato e quelle future):

$$MSEP\left(R_i\right) = \widehat{Z}_{in}^2 \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\alpha}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2} \cdot \left(\frac{1}{\widehat{Z}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n-k} Z_{q,k}} \right)$$

6) varianza della riserva totale

$$MSEP\left(R\right) = \sum_{i=2}^{n} \left(MSEP\left(R_i\right) + \widehat{Z}_{in} \cdot \left(\sum_{q=i+1}^{n} \widehat{Z}_{qn} \right) \cdot \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{2 \cdot \widehat{\alpha}_k^2}{\widehat{\lambda}_k^2 \cdot \sum_{q=1}^{n-k} Z_{q,k}} \right)$$

Chain Ladder Distribution Free (Mack Model)

Caratteristiche:

- **Fornisce in formula chiusa i primi due momenti della v.a. R ma non l'intera distribuzione (Valore atteso = stima deterministica del CL Paid)**
- **Non è un modello simulativo**
- **Con la variante proposta da Merz et al (2007) consente di stimare il σ del rischio di riservazione su un orizzonte di tempo annuale (v.a. CDR)**

Chain Ladder Distribution Free (Mertz e Wuthrich)

Considerando un triangolo senza coda (I=J) e indicando con D_I le informazioni disponibili al tempo I, il modello di Mertz e Wuthrich definisce la seguente grandezza, denominata **Claims Development Result** (CDR):

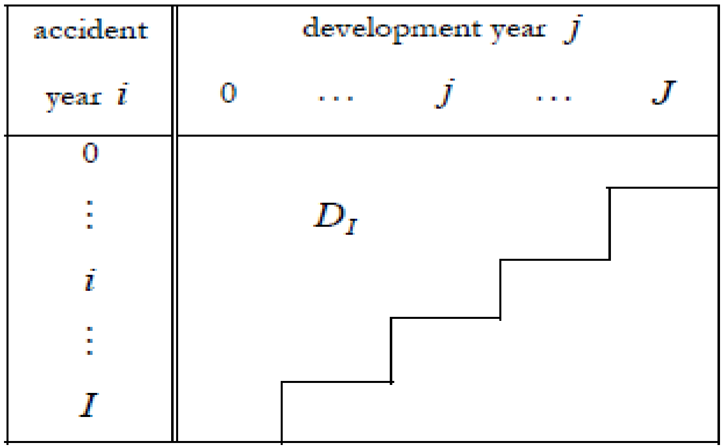
$$CDR = E(R_I \mid D_I) - (P_{i+j=I+1} + E(R_{I+1} \mid D_{I+1}))$$

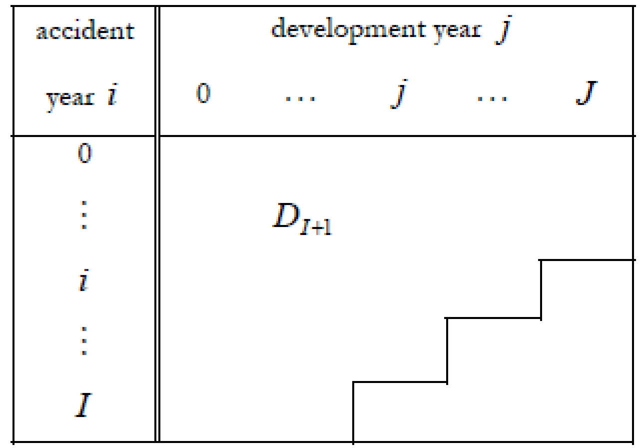
Pari alle differenze tra **la riserva iniziale** (deterministica e funzione delle informazioni note al tempo I) e la somma **dei pagamenti incrementali P** effettuati nel corso dell'anno e **della nuova riserva stimata** in funzione delle nuove osservazioni al tempo I+1.

Tale grandezza rappresenta pertanto **l'utile o la perdita generata dalla riserva sinistri** nell'anno di calendario successivo alla data di valutazione e causata da uno scostamento tra le nostre aspettative in t=0 per l'anno [t=0,t+1=1] e ciò che si è effettivamente verificato nell'anno [t=0,t+1=1].

Chain Ladder Distribution Free (Mertz e Wuthrich)

Graficamente pertanto si ha la seguente situazione





Tratto da Merz-Wuthrich (2008), "Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes"

Chain Ladder Distribution Free (Mertz e Wuthrich)

Mertz e Wuthrich propongono di calcolare la variabilità del Claims Development Result, che rappresenta la variabilità oggetto di interesse ai fini Solvency II (orizzonte temporale 1 anno), in quanto racchiude al suo interno la variabilità dei pagamenti nell'anno successivo alla data di valutazione (shock period) e la variabilità della riserva da accantonare alla chiusura dell'esercizio successivo (effect period):

$$msep_{CDR|D_I} = E\left[(CDR - 0)^2 \mid D_I\right]$$

La stima della suddetta variabilità è ottenuta è ottenuta ipotizzando che siano soddisfatte le ipotesi del metodo Chain-Ladder classico e utilizzando un triangolo senza coda.

Chain Ladder Distribution Free (Mertz e Wuthrich)

Formule di calcolo del modello di Mertz e Wuthrich:

1) Stimatori dei fattori di sviluppo

$$\hat{\lambda}_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}$$

2) Varianza del CDR dell'i-esima:

$$msep_{CDR_i(I+1)|D_I(0)} =$$

$$= E\left[\left(CDR_i(I+1)-0\right)^2 \mid D_I\right] = E\left[\left(\hat{C}_{i,J}^I - \hat{C}_{i,J}^{I+1}\right)^2 \mid D_I\right] =$$

$$= \hat{C}_{i,J}^2 \left[\frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / \left(\hat{\lambda}_{I-i}^I\right)^2}{C_{i,I-i}} + \frac{\hat{\sigma}_{I-i}^2 / \left(\hat{\lambda}_{I-i}^I\right)^2}{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} C_{k,j}} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \left(\hat{\lambda}_j^I\right)^2}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \right]$$

Chain Ladder Distribution Free (Mertz e Wuthrich)

3) Varianza del CDR complessivo

$$msep_{\sum_i CDR_i(I+1)|D_I(0)} = \sum_i msep_{CDR_i(I+1)|D_I(0)}$$

$$+\, 2\sum_{i<l} \hat{C}^I_{i,J}\hat{C}^I_{l,J}\left[\frac{\hat{\sigma}^2_{I-i}/\left(\hat{\lambda}^I_{I-i}\right)^2}{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1}\frac{C_{I-j,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} C_{k,j}}\,\frac{\hat{\sigma}^2_j/\left(\hat{\lambda}^I_j\right)^2}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}}\right]$$

Caratteristiche:

- Fornisce in formula chiusa i primi due momenti della v.a. CDR ma non l'intera distribuzione
- Non è un modello simulativo

Over Dispersed Poisson (ODP Model)

Nel modello Over Dispersed Poisson (ODP), proposto nel 1998 da Renshaw e Verral, si effettuano le seguenti ipotesi:

1) I pagamenti incrementali Y_{ij} sono v.a. indipendenti;

2) il valore atteso dei pagamenti incrementali è uguale al prodotto di un "fattore riga" e di un "fattore colonna" :

$$E\left[Y_{ij}\right] = a_i \cdot b_j$$

3) la varianza dei pagamenti incrementali è proporzionale al valore atteso:

$$Var\left(Y_{ij}\right) = \phi \cdot a_i \cdot b_j$$

Over Dispersed Poisson (ODP Model)

L'ODP può essere alternativamente formulato come un modello lineare generalizzato (GLM). E' stato inoltre dimostrato che sotto le ipotesi del modello ODP sopra enunciate, e con alcune appropriate condizioni addizionali, gli stimatori di massima verosimiglianza dei fattori di sviluppo coincidono con i fattori di sviluppo del chain ladder classico:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Z_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} Z_{i,j}}$$

Caratteristiche:

- L'ODP può essere formulato come GLM → consente di stimare in formula chiusa i primi due momenti della v.a. R ma non l'intera distribuzione (Valore atteso = stima deterministica del CL Paid)
- Applicando la procedura di Bootstrapping (Eng. Verr. 1999) l'ODP diventa un modello simulativo che fornisce tutta la distribuzione di probabilità dei singoli Y_{ij}

Il Bootstrapping

I metodi di bootstrapping sono basati su una procedura di campionamento con ripetizione applicata ai dati osservati, per generare un campione molto ampio di "pseudo-dati", che possono essere considerati estratti dalla medesima distribuzione.

La procedura di Bootstrapping viene applicata ai cosiddetti "residui di Pearson" corretti per tener conto dei gradi di libertà:

$$r'_{ij} = \frac{Y_{ij} - \widehat{Y}_{ij}}{\sqrt{\widehat{Y}_{ij}}} \cdot \sqrt{\frac{m}{m-p}}$$

dove $m = n \cdot (n+1)/2$ è il numero delle osservazioni (i pagamenti incrementali osservati), mentre $p = 2 \cdot n - 1$ è il numero di parametri stimati.

Il Bootstrapping

Fasi del Bootstrapping (da compiere per ogni storia simulata):

1. campionare con ripetizione i residui;
2. costruzione di un nuovo triangolo passato di pseudo pagamenti incrementali
3. applicare il chain ladder tradizionale a questo nuovo triangolo
4. correggere i pagamenti incrementali futuri per tener conto della "process variance" simulando una distribuzione ODP con media e varianza date rispettivamente da:

$$E\left[Y_{ij}\right] = {}_k\widehat{Y}_{ij} \qquad e \qquad Var\left(Y_{ij}\right) = \widehat{\phi} \cdot {}_k\widehat{Y}_{ij}$$

5. stimare la riserva sinistri

Osservazioni

- I modelli presentati sinora sono delle estensioni del Chain Ladder deterministico
  - Impatto sulla stima della Best Estimate
  - Stessi limiti del CL deterministico
- Il CL-DF è il più semplice dei tre modelli sia dal punto di visto della struttura probabilistica che dell'implementazione. D'altro canto però non fornisce tutta la distribuzione simulata delle v.a. oggetto di studio.
- L'ODP è anch'esso piuttosto semplice e presenta in aggiunta il vantaggio di fornire l'intera distribuzione di probabilità simulata dei pagamenti incrementali futuri.

Metodi bayesiani

- **La differenza fondamentale dei metodi bayesiani rispetto ai modelli "standard" è che, una volta definito il modello probabilistico $f_{Y|\Theta}\left(y|\theta\right)$ per la stima dei pagamenti futuri, i parametri del modello $\Theta=\left\{\theta_1,\ldots,\theta_m\right\}$ sono considerati a loro volta delle v.a. con una fissata distribuzione $\pi\left(\theta\right)$ a priori (doppio livello di aleatorietà)**
- **l'idea alla base dei metodi bayesiani è quella di aggiornare la distribuzione a priori dei parametri con l'informazione desunta dall'osservazione Y (triangoli run off) sfruttando il noto teorema Bayes. Si ottiene quindi la distribuzione a posteriori dei parametri del modello:**

$$\boxed{\pi_{\Theta|Y}\left(\theta|y\right)=\frac{f_{Y|\Theta}\left(y|\theta\right)\pi\left(\theta\right)}{\int f_{Y|\Theta}\left(y|\theta\right)\pi\left(\theta\right)d\theta}}$$

Metodi Bayesiani

- La distribuzioni a posteriori viene quindi utilizzata per costruire la distribuzione di probabilità delle osservazioni future X (i pagamenti incrementali futuri), condizionata dal campione di dati osservati Y, ovvero si determina la distribuzione previsiva del modello:

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y) = \int f_{X|\Theta}(x|\theta) \cdot \pi_{\Theta|Y}(\theta|y)\, d\theta}$$

- La risoluzione per via analitica dell'integrale al denominatore della distribuzioni a posteriori (2) è difficile se non in diversi casi impossibile.
- Al fine di risolvere tale integrale abbiamo deciso di utilizzare la tecnica simulativa degli MCMC (Monte Carlo Markov Chain).

Chain Ladder Bayesiano - Scollnick

- **Il CL-Bayes (Scollnick 2004) è un'estensione al caso stocastico-bayesiano del modello CL Paid deterministico.**

- **Distribuzioni del modello:**
  - **Fattori di sviluppo** $\lambda[i,j] \sim N\left(\theta_j, \frac{1}{\tau}\right)$
  - **Valore atteso dei fattori di sviluppo** $\vartheta_j \sim N\left(\mu_j, \frac{1}{\tau_\vartheta}\right)$

- **Distribuzioni a priori:**

$\tau \sim \Gamma(a, b)$ $\tau_\vartheta \sim \Gamma(e, f)$

$\mu_\vartheta \sim N\left(c, \frac{1}{d}\right)$

Il Fisher-Lange bayesiano

Il modello deterministico Fisher-Lange ("average cost per claim method") consente di determinare i pagamenti futuri, e di conseguenza la riserva sinistri, come prodotto tra la stima del numero di sinistri da pagare in futuro (np_{ij}) ed il costo medio (cm_{ij}) corrispondente:

$$\boxed{P_{ij} = np_{ij} \cdot cm_{ij} \cdot (1+ir)^{i+j-n-1}}$$

dove:

$$\boxed{np_{ij} = nr_{ij-1} \cdot aliq_{ij-1} \cdot \frac{v_{ij}}{\sum_{k=j}^{n} v_{ik}}}$$

sinistri da liquidare

aliquote dei sinistri a riserva con seguito

velocità di liquidazione

Il Fisher-Lange bayesiano

Estensione al caso stocastico del modello deterministico Fisher-Lange (Forte, Ialenti, Pirra [6]):

Impostazione bayesiana - distribuzioni a priori relative a:

1. **aliquote dei sinistri con seguito:** $Aliq_{ij} \sim N\left(\vartheta_j^{Aliq}; \omega^{Aliq}\right)$
2. **velocità di liquidazione:** $\nu_{ij} \sim N\left(\vartheta_j^{\nu}; \omega^{\nu}\right)$
3. **costi medi:** $CM_{ij} \sim N\left(\vartheta_j^{CM}; \omega^{CM}\right)$

Distribuzioni a posteriori dei parametri e distribuzione previsiva del modello costruite mediante metodologie Monte Carlo Markov Chain (MCMC)

Approcci bayesiani: si combina *l'expert knowledge* o le informazioni precedentemente esistenti con le osservazioni ottenendo come risultato una stima del costo ultimo dei sinistri

Il Fisher-Lange bayesiano

I vantaggi principali che presenta il Fisher-Lange Bayesiano sono:

- supera i noti limiti del Chain Ladder (nelle sue varianti stocastiche come ad esempio il modello di Mack o l'Over Dispersed Poisson), e più in generale delle metodologie di tipo link ratio
- consente di rappresentare in maniera esplicita le politiche di liquidazione della Compagnia (attraverso la velocità di liquidazione);
- consente di rappresentare in maniera esplicita le politiche di riservazione della Compagnia (attraverso le aliquote dei sinistri con seguito che permettono di considerare anche i sinistri chiusi senza seguito e i sinistri riaperti);
- permette di considerare e di trattare separatamente eventuali avvenimenti anomali che caratterizzano una particolare generazione o un particolare anno di calendario
- consente di modellizzare il costo medio dei sinistri pagati e l'inflazione futura autonomamente e indipendentemente rispetto al numero dei sinistri.

Osservazioni

- **Tutti i modelli presentati nel capitolo 3 fanno parte della famiglia dei modelli bayesiani:**
  - **Impatto sulla stima del Reserve Risk Capital**
  - **Complessità nell'implementazione (Winbugs)**
- **Il CL-Bayes è il più semplice dei tre modelli dal punto di visto della struttura probabilistica ed è anche quello che richiede il minor numero di dati di input. Presenta gli stessi limiti del CL deterministico (parzialmente superati grazie all'elevata flessibilità derivante dall'impostazione bayesiana)**
- **Il FL Bayes è il più complesso tra i 3 modelli: richiede numerosi dati di input numerosi e affidabili, inoltre è necessaria la stima di numerosi parametri che possono in qualche modo far aumentare la soggettività della stima finale. D'altro canto però presenta anche i numerosi vantaggi precedentemente esposti.**

Punti Aperti

- **Scelta del modello interno da adottare**
- **Metodologie per la validazione e il backtesting del modello**
- **Metodologia Re-Reserving**
- **Fattore Coda**
- **Valutazioni al netto della Riassicurazione**

Test modelli bayesiani

I modelli bayesiani per la stima della riserva sinistri stanno avendo uno sviluppo notevole in termini di ricerca negli ultimi anni. Tali sviluppi sono concentrati non soltanto nella costruzione di nuovi modelli, ma anche alla verifica della loro bontà. Di seguito si elencano alcune delle principali verifiche che sono state proposte (Forte, Ialenti e Pirra [8]):

- Confronto tra distribuzione a priori e distribuzione a posteriori dei principali parametri del modello
- Analisi di convergenza delle catene di Markov nell'ambito delle metodologie MCMC
- Verifica, ove possibile, tra i momenti simulati e i momenti teorici della distribuzione di probabilità della riserva sinistri

Backtesting

La normativa Solvency II richiede espressamente che le imprese abbiano "processes and procedures in place to insure that best estimates, and the assumptions underlying the calculation of the best estimates, are regularly compared against experience." (**Backtesting**)

Le metodologie per il Backtesting sono tuttora oggetto di dibattito e di ricerca a livello internazionale.

Di seguito riportiamo un possibile approccio metodologico proposto già in diversi articoli a livello internazionale:

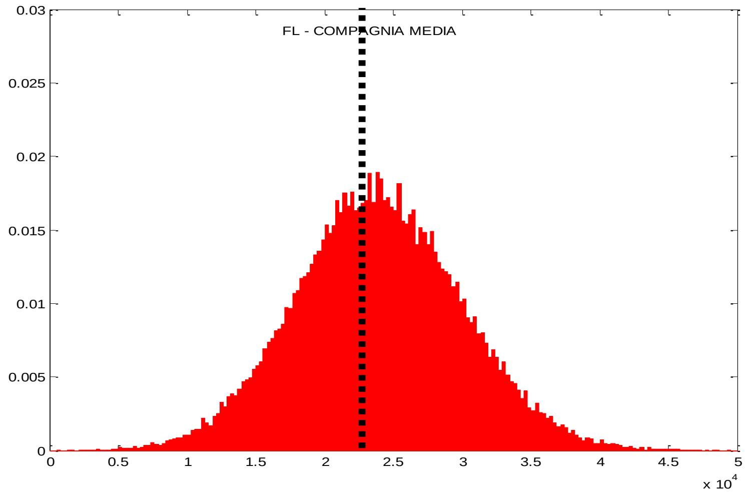
Backtesting

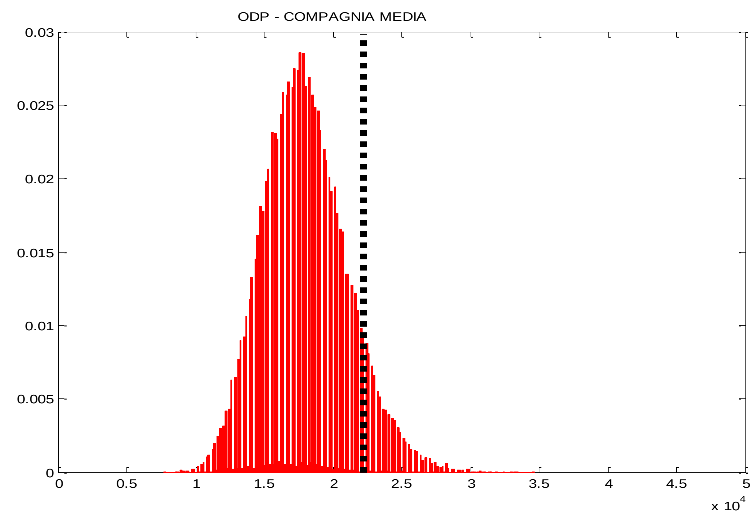
- **Procedimento di Backtesting:**
  - Applicazione del modello stocastico per la stima della distribuzione della riserva sinistri al triangolo run off decurtato dell'ultima diagonale
  - Confronto l'importo effettivamente pagato dalla Compagnia nel corso dell'esercizio appena concluso e la distribuzione di probabilità dell'importo pagato nella prima diagonale futura ottenuto con il modello stocastico

Y[i,j]	*Anno di Sviluppo*									
Avvenimento	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1998										
1999										
2000										
2001										
2002										
2003										
2004										
2005										
2006										
2007										

Backtesting

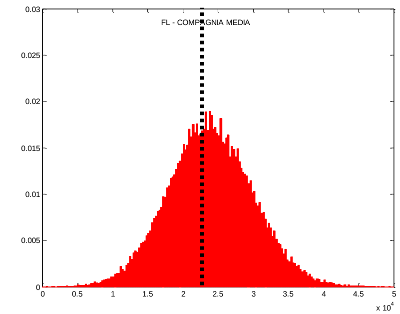
- **Procedimento di Backtesting:**
  - Determinazione dei p-value per singolo pagamento (Y_{ij}) della prima diagonale e dei pagamenti complessivi (somma degli Y_{ij} della prima diagonale)
  - Costruzione di range di preferibilità nel caso in cui si siano adottati più modelli stocastici





Backtesting

- Nel caso sia stato impiegato il modello stocastico **Fisher Lange Bayesiano**, è possibile effettuare il backtesting delle principali grandezze del modello, confrontando ad esempio:



  - La distribuzione di probabilità a posteriori dei *costi medi*, per singola antidurata, con i costi medi effettivamente osservati nell'esercizio successivo. Si effettua quindi un'analisi actual vs expected confrontando la distribuzione attesa dei costi medi (prima diagonale stimata) con quelli effettivi.

  - La distribuzione di probabilità a posteriori del *numero dei sinistri pagati e riservati*, per singola antidurata, con i rispettivi numeri effettivamente osservati nell'esercizio successivo. Si effettua quindi un'analisi actual vs expected confrontando la distribuzione attesa del numero dei sinistri (prima diagonale stimata) con quelli effettivi.

Applicazione Numerica 1 – Mack e Mertz model

Triangolo run off pagamenti cumulati

"i"	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7	k = 8	k = 9	k = 10
1	357,848	1,124,788	1,735,330	2,218,270	2,745,596	3,319,994	3,466,336	3,606,286	3,833,515	3,901,463
2	352,118	1,236,139	2,170,033	3,353,322	3,799,067	4,120,063	4,647,867	4,914,039	5,339,085	
3	290,507	1,292,306	2,218,525	3,235,179	3,985,995	4,132,918	4,628,910	4,909,315		
4	310,608	1,418,858	2,195,047	3,757,447	4,029,929	4,381,982	4,588,268			
5	443,160	1,136,350	2,128,333	2,897,821	3,402,672	3,873,311				
6	396,132	1,333,217	2,180,715	2,985,752	3,691,712					
7	440,832	1,288,463	2,419,861	3,483,130						
8	359,480	1,421,128	2,864,498							
9	376,686	1,363,294								
10	344,014									

Applicazione Numerica 1 – Mack e Mertz model

Risultati

	Mack		Mertz - Wuthrich	
Generazione	Total SD	CV	Total SD	CV
1	-	0.0%		
2	75,535	79.8%	75,535	79.8%
3	121,699	25.9%	101,481	21.6%
4	133,549	18.8%	69,649	9.8%
5	261,406	26.5%	232,061	23.6%
6	411,010	29.0%	313,099	22.1%
7	558,317	25.6%	351,305	16.1%
8	875,328	22.3%	618,718	15.8%
9	971,258	22.7%	575,710	13.5%
10	1,363,155	29.5%	1,022,722	22.1%
Totale	2,447,095	13.1%	1,708,123	9.1%

Applicazione Numerica 2 – R.C.G.

Nell'applicazione numerica è stato usato il modello Fisher-Lange bayesiano per calcolare la Best Estimate, il Risk Margin e il Reserve Risk Capital della riserva sinistri relativa al ramo RCG con i seguenti approcci:

- **a) modello interno – orizzonte di tempo annuale per stimare il RRC**
- **b) formula standard proposta nel QIS 5**
- **c) modello USP, Undertaking Specific Parameter**

I risultati ottenuti sono stati confrontati con i valori determinati usando i seguenti modelli stocastici già noti in letteratura:

- **I. Modello di Merz-Wuthrich**
- **II. Over Dispersed Poisson con Bootstrapping**
- **III. Bornhuetter-Ferguson bayesiano**

Applicazione Numerica 2 – R.C.G.

✓ I modelli sono stati applicati a tre Compagnie che esercitano il ramo R.C.G.

A. Compagnia di GRANDI dimensioni (396 milioni di euro)
B. Compagnia di MEDIE dimensioni (106 milioni di euro)
C. Compagnia di PICCOLE dimensioni (16 milioni di euro)

- valutazione dell'impatto sulla dimensione delle riserve al variare del modello

- Analisi di Backtesting

Applicazione Numerica 2 – Compagnia B (MEDIA)

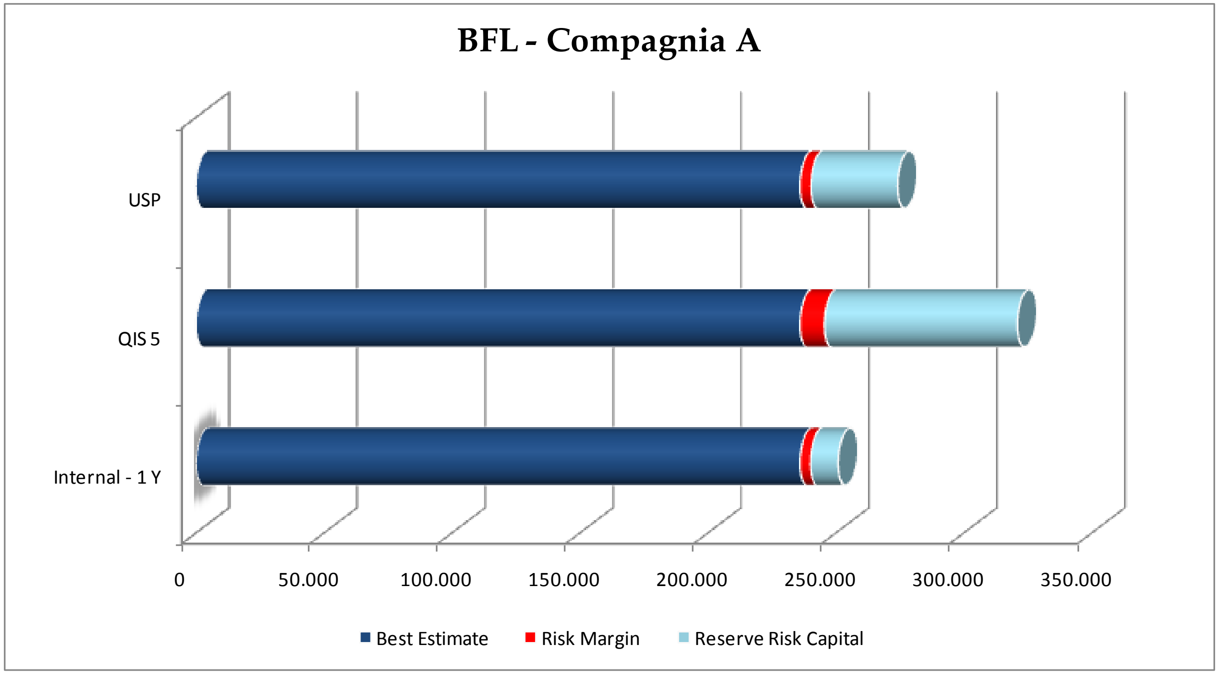
COMPAGNIA B				
Internal 1Y	***Merz***	***ODP Boot***	***BF Bayes***	***FL Bayes***
Best Estimate	€ 84.902	€ 85.847	€ 91.010	€ 76.820
Risk Margin (% BE)	5,37%	5,83%	6,17%	3,64%
Reserve Risk Capital (% BE)	21,48%	27,69%	25,58%	20,41%
Sigma (1 year)	**9,43%**	**11,41%**	**15,12%**	**9,48%**

COMPAGNIA B				
Standard QIS5	***Merz***	***ODP Boot***	***BF Bayes***	***FL Bayes***
Best Estimate	€ 84.902	€ 85.847	€ 91.010	€ 76.820
Risk Margin (% BE)	6,49%	6,51%	6,38%	5,51%
Reserve Risk Capital (% BE)	31,91%	31,91%	31,91%	31,91%
Sigma (1 year)	**11,00%**	**11,00%**	**11,00%**	**11,00%**

(Dati in migliaia di euro)

Applicazione Numerica 2 – Risultati Fisher-Lange

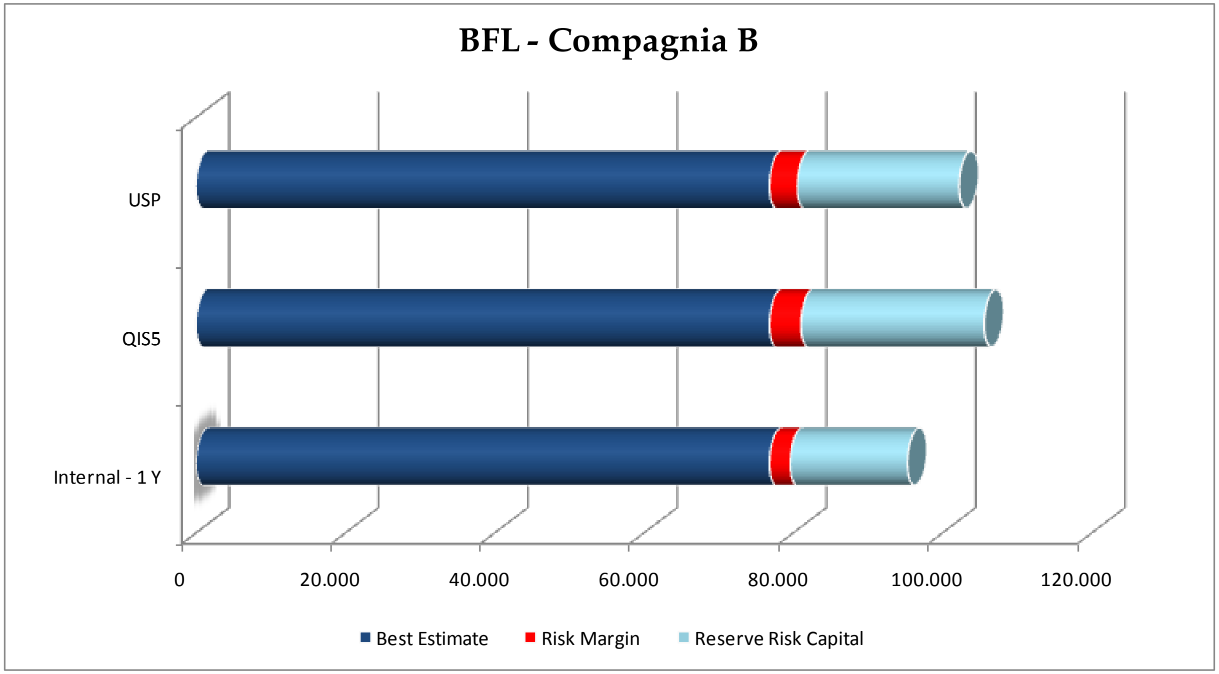
COMPAGNIA A			
Fisher Lange	***Internal - 1 Y***	***QIS5***	***USP***
Best Estimate	€ 236.000	€ 236.000	€ 236.000
Risk Margin (% BE)	1,75%	4,06%	1,82%
Reserve Risk Capital (% BE)	4,56%	31,91%	14,31%
Sigma	**2,75%**	**11,00%**	**5,24%**



(Dati in migliaia di euro)

Applicazione Numerica 2 – Risultati Fisher-Lange

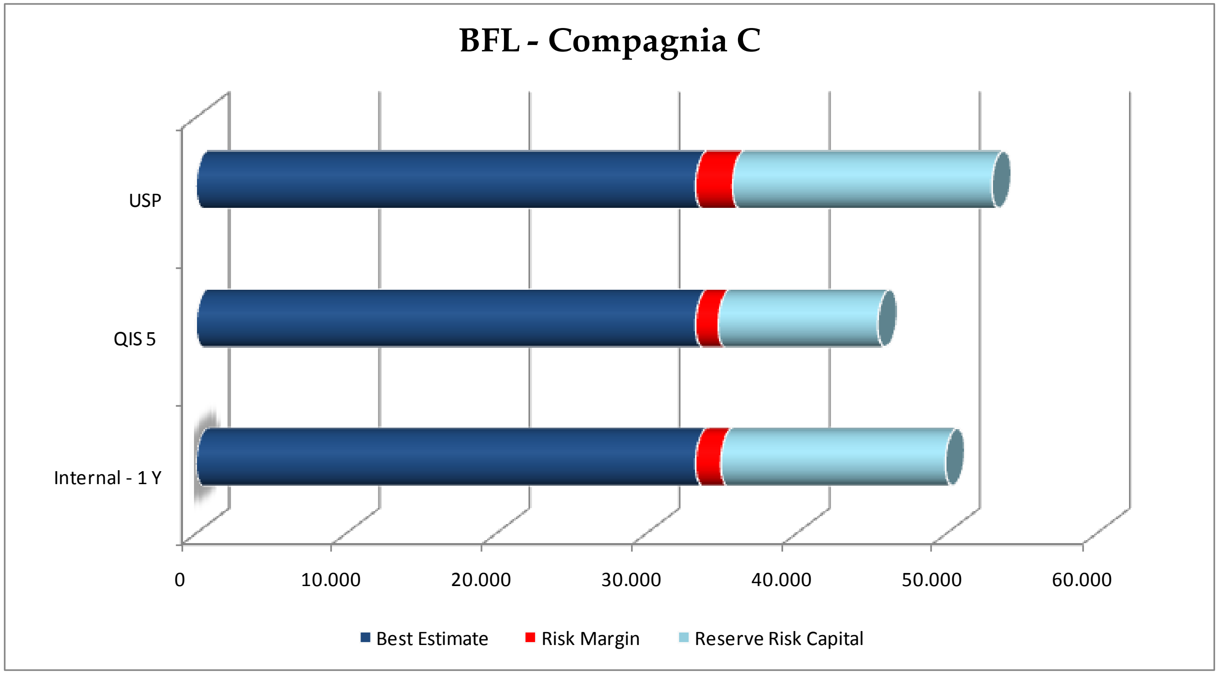
COMPAGNIA B			
Fisher Lange	**Internal - 1 Y**	**QIS5**	**USP**
Best Estimate	€ 76.820	€ 76.820	€ 76.820
Risk Margin (% BE)	3,64%	5,51%	4,87%
Reserve Risk Capital (% BE)	20,41%	31,91%	28,19%
Sigma	**9,48%**	**11,00%**	**9,84%**



(Dati in migliaia di euro)

Applicazione Numerica 2 – Risultati Fisher-Lange

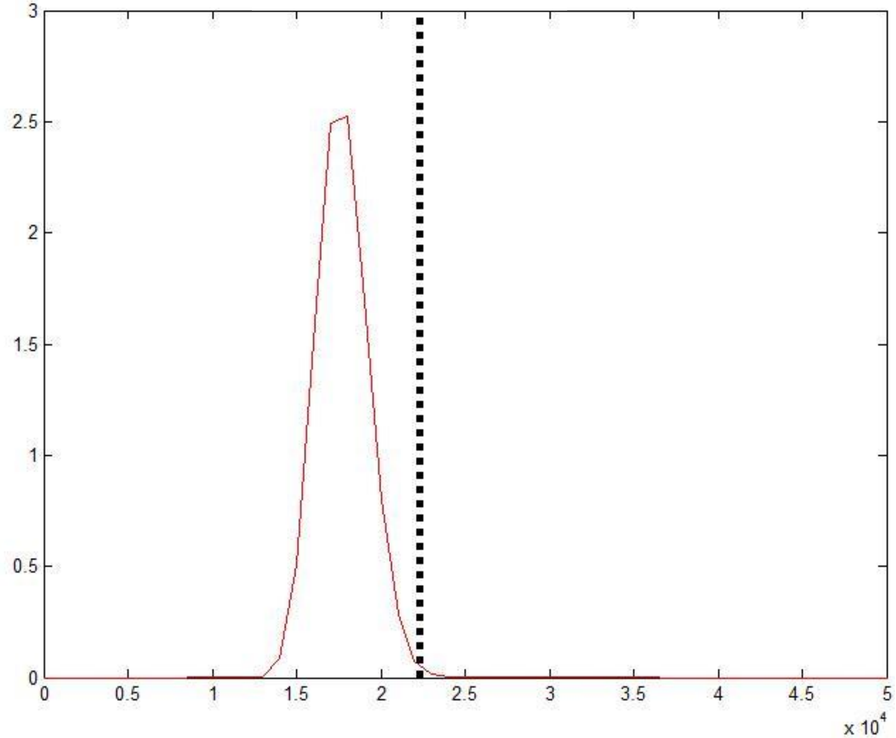
COMPAGNIA C			
Fisher Lange	**Internal - 1 Y**	**QIS5**	**USP**
Best Estimate	€ 33.282	€ 33.282	€ 33.282
Risk Margin (% BE)	5,07%	4,55%	7,40%
Reserve Risk Capital (% BE)	44,90%	31,91%	51,87%
Sigma	**18,05%**	**11,00%**	**16,86%**



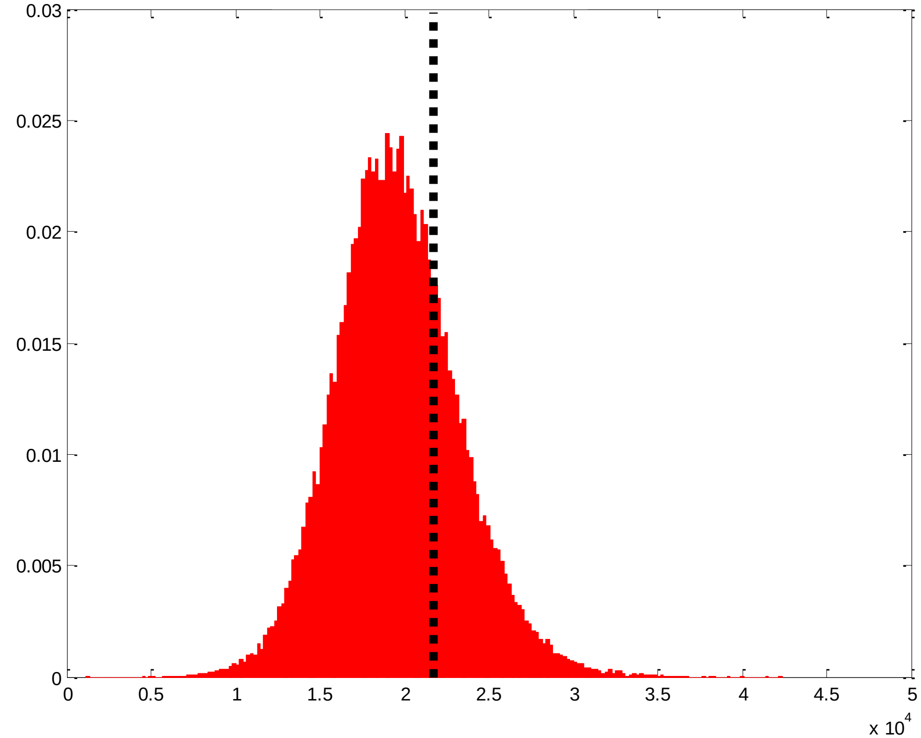
(Dati in migliaia di euro)

Applicazione Numerica 2 – Backtesting

MERZ – COMPAGNIA B (MEDIA)



BF – COMPAGNIA B (MEDIA)

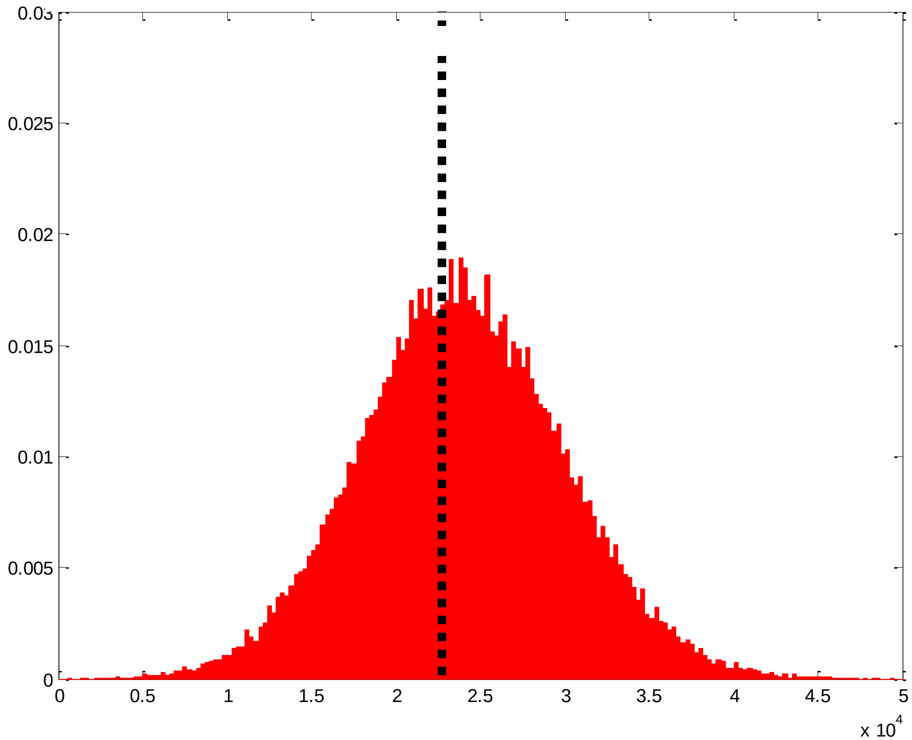


Y[i,j]	Anno di Sviluppo									
Avvenimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1998										
1999										
2000										
2001										
2002										
2003										
2004										
2005										
2006										
2007										

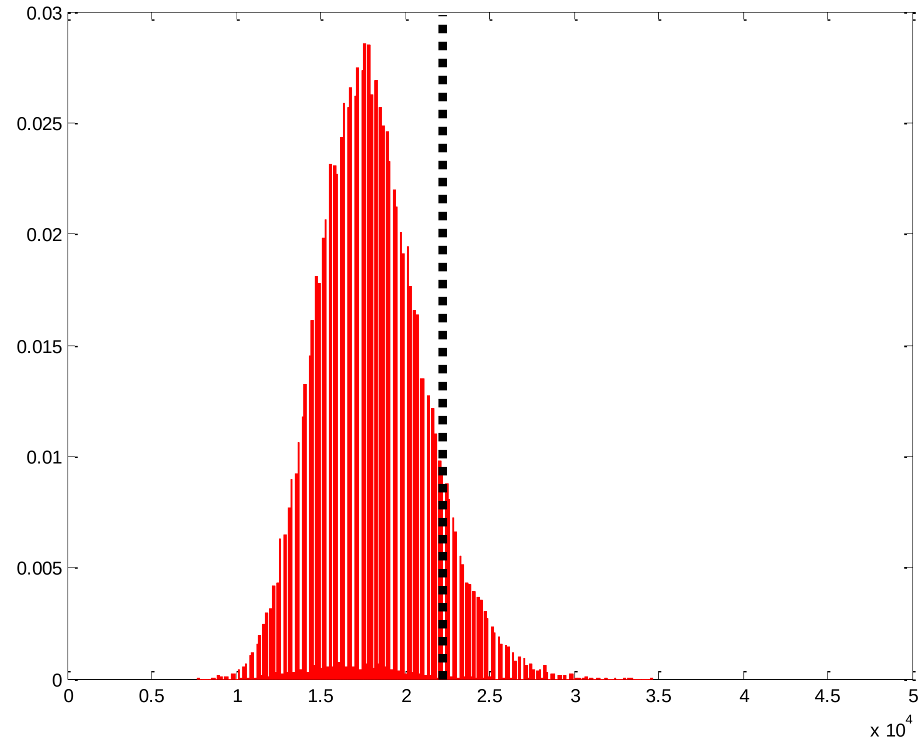
(Dati in migliaia di euro)

Applicazione Numerica 2 – Backtesting

FL – COMPAGNIA B (MEDIA)



ODP – COMPAGNIA B (MEDIA)



Y[i,j]	*Anno di Sviluppo*									
Avvenimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1998										
1999										
2000										
2001										
2002										
2003										
2004										
2005										
2006										
2007										

(Dati in migliaia di euro)

Applicazione Numerica 2 – Backtesting

		COMPAGNIA		
		GRANDE - A	MEDIA - B	PICCOLA - C
VALORI STIMATI	MERZ	56.360	17.798	2.493
	ODP	56.360	17.798	2.493
	BF	58.724	19.597	4.901
	FL	106.363	23.954	10.597
VALORE PAGATO		69.903	22.337	2.831

		COMPAGNIA		
		GRANDE - A	MEDIA - B	PICCOLA - C
RANGE DI PREFERIBILITA'	MERZ	2	3	**1**
	ODP	2	3	**1**
	BF	**1**	2	2
	FL	3	**1**	3

(Dati in migliaia di euro)

Applicazione Numerica 2 – Osservazioni

- **I risultati del *case study* oggetto di analisi sembrerebbero portare alle seguenti conclusioni:**
  - **la stima della Best Estimate è particolarmente influenzata dalla metodologia deterministica che sta alla base del modello stocastico;**
  - **le misure di variabilità (σ) e di rischio (RRC) dipendono in maniera significativa dalla struttura probabilistica ipotizzata nel modello e dalle dimensioni della Compagnia.**

- **Criticità approccio standard :**
  - **Reserve Risk Capital proporzionale alla Best Estimate**
  - **coefficiente di variazione σ uguale per tutte le Compagnie**

Riferimenti Bibliografici

[1] AISAM-ACME, 2007, *Study on non-life long tail liabilities. Reserve risk and risk margin assessment under Solvency II*, (pdf available on web).

[2] EIOPA, 2012, *Technical Specifications for the Solvency II valuation and Solvency Capital Requirements calculations (Part I)*, (pdf available on web).

[3] European Commission, 2009, *Solvency II directive*, (pdf available on web).

[4] England P., 1999, *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*, Insurance: Mathematics & Economics Elsevior Science Publishers - New York.

[5] Fisher W., Lange J., 1973, *Loss Reserve Testing: A Report Year Approach*, Casualty Actuarial Society Proceedings.

[6] Forte S., Ialenti M., Pirra M., 2008, *Bayesian Internal Models for the reserve risk assessment*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, Volume LXXI, Roma.

[7] Forte S., Ialenti M., Pirra M., 2009, *A reserve risk model for a non-life insurance company*, Mathematical Methods in Economics and Finance

[8] Forte S., Ialenti M., Pirra M., 2011, *Implementing a Solvency II internal model: Bayesian stochastic reserving and Parameter Estimation*, ASTIN 2011, Madrid (pdf available on www.astin2011.org).

[9] Gilks, W.R., Richardson S., Spiegelhalter D. J.,1995, *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall).

[10] IAA Risk Margin Working Group, 2008, *Measurement of liabilities for insurance contracts: current estimates and risk margins*, (pdf available on web).

[11] Mack, T. 1993, *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*, Astin Bulletin, Vol. 23, No.2.

[12] Scollnik, D. P.M., *Actuarial Modelling with MCMC and BUGS*, North American Actuarial Journal 5:2, 2001, pp. 96-124.

GRAZIE !

Salvatore Forte
Salvatore.Forte@uniroma1.it

Fabio Grasso
Fabio.Grasso@uniroma1.it

Matteo Ialenti
Matteo.Ialenti@uniroma1.it

Marco Pirra
Marco.Pirra@unical.it